

## 弱い重力レンズ効果と銀河団ハローの形状

著者	高橋 馨
学位授与機関	Tohoku University
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10097/34724">http://hdl.handle.net/10097/34724</a>

# 弱い重力レンズ効果と銀河団ハローの形状

東北大学大学院博士課程前期 2 年 高橋 馨

2008 年 2 月 20 日





## 要旨

銀河団に付随している暗黒物質の質量分布は、シミュレーションの結果から 3 軸不等な楕円体 (Jing&Suto モデル) によってよく近似できることがわかっている。また、Jing&Suto モデルを天球面に投影すると、視線方向に対してどのような角度で投影したとしても、必ず質量分布は楕円になることが理論的に示されている。この楕円の長軸と短軸の比を  $q$  とすると、 $q$  の確率分布関数は宇宙論モデルのパラメーター (物質密度  $\Omega_m$ , 暗黒エネルギー密度  $\Omega_\Lambda$ , ハッブルパラメーター  $h$ ) に依存した関数として計算することができる。したがって、様々な銀河団を観測して  $q$  の値を求めることができれば、冷たい暗黒物質が支配する宇宙の構造形成モデルの検証が可能になる。

電磁波によって直接観測できない暗黒物質の分布を調べる方法として、銀河団の暗黒物質ハローによって背景銀河の像が歪む、重力レンズ効果を観測することは非常に強力な手段になる。これまでは観測データに球対称ハローモデル (NFW モデル) をフィッティングすることで、ビリアル質量 ( $M_{\text{vir}}$ ) と中心集中度 (concentration parameter:  $c_{\text{vir}}$ ) を求めることがされてきた。しかし、一般的に暗黒物質ハローは Jing&Suto モデルで表されるので、 $q$  を求めるためには  $(q, M_{\text{vir}}, c_{\text{vir}})$  をパラメーターとして背景銀河の像の歪み (シアー) を再現するような、これまでとは異なるモデルが必要になる。そこで、この論文では NFW モデルを修正した新しいモデルを考えた。そして、銀河団 Abell1689 のシアーの観測データに適用して  $q = 0.94^{+0.06}_{-0.21}$  という結果が得られた。



# 目次

第 1 章	イントロダクション	1
第 2 章	一般相対性理論と膨張宇宙	5
2.1	フリードマン方程式	5
2.2	宇宙論パラメーター	6
2.3	物質と輻射	7
2.4	赤方偏移	13
2.5	距離	14
第 3 章	重力レンズ	19
3.1	重力レンズの概観	19
3.2	レンズ方程式	21
3.3	シアーと拡大率	23
3.4	像の形	26
第 4 章	暗黒物質ハローの球対称崩壊モデル	29
第 5 章	銀河団ハローモデルと弱い重力レンズ効果	43
5.1	球対称暗黒物質ハロー	43
5.1.1	NFW プロファイル	43
5.1.2	NFW モデルの面密度とシアー	46
5.2	非球対称暗黒物質ハロー	48
5.2.1	Jing&Suto モデル	48
5.2.2	3次元質量分布の視線方向への投影	50
5.2.3	Jing&Suto モデルによって生じるシアー	54
第 6 章	確率分布関数	63
6.1	軸比の確率分布関数	63

6.2	ビリアル質量 ( $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$ ), 中心集中度 ( $c_{\text{vir}}$ ) の確率分布関数 . . . . .	64
第 7 章	3 軸不等なハローの形の制限 . . . . .	71
7.1	ハローの形状制限の方法 . . . . .	71
7.2	理論モデル計算 . . . . .	74
7.3	観測データへの適用 . . . . .	81
7.3.1	結果 (背景銀河:赤い銀河のみ) . . . . .	82
7.3.2	結果 (背景銀河:赤い銀河 + 青い銀河) . . . . .	87
第 8 章	議論 . . . . .	95
付録 A	レンズ方程式の導出 . . . . .	97
付録 B	パワースペクトル . . . . .	103
B.1	リンバーの方程式 . . . . .	103
B.2	$\bar{\kappa}_{\text{eff}}$ のパワースペクトル . . . . .	106
B.3	$P_{\delta}$ の線形、非線形パワースペクトル . . . . .	107
謝辞	. . . . .	111
参考文献	. . . . .	113

## 第1章

# イントロダクション

20世紀初めにアインシュタインによって発表された一般相対性理論は、その後の物理学の発展、特に宇宙の理解に対して重要な影響を及ぼした。それまで成功を収めていたニュートン力学では、確立された運動の3法則、離れた2地点間にある質量に働く万有引力によって、地上の物体の運動から太陽系の惑星の運動に至るまでをほぼ理解することができていた。ところが、一般相対性理論の登場によってニュートン力学は修正されることになる。遠隔作用として考えられていた重力は、重力場という概念によって近接作用として扱われることになった。すると、質量を持たない光子も、天体の近傍を通過するときに重力によって光路が曲げられることになる。この現象は実際に、1919年の日食時に、太陽の近くに見える星の位置がわずかにずれて観測されたことで確かめられ、一般相対性理論が広く受け入れられるきっかけの1つになった。

また、観測装置の進歩も宇宙の理解や新しい発見など、大きな役割をはたして来た。近年の様々な観測結果によると、宇宙の年齢はおよそ137億年、宇宙の構成要素はおよそバリオン4%、暗黒物質 (dark matter) 23%、暗黒エネルギー (dark energy) 73% であることがわかってきた。驚くべきことに、電磁波によって観測できるバリオンはこの宇宙にわずか4%しかなく、残りの96%は今だ正体がわからないままである。

宇宙の構成要素の7割を占める暗黒エネルギーは、現在宇宙が加速度的に膨張しているという観測結果から、その存在が考えられている。一方、23%を占める暗黒物質は、銀河スケールでもその存在を推測することができる。私達の住んでいる銀河の回転曲線を描くと、中心から離れても一定の値を保っている。もし、銀河にはバリオンのみがあってケプラー回転しているとすると、回転速度は銀河中心から離れるにつれて遅くなるはずである。このようにはならず、銀河中心から離れたところでも一定の回転速度を持つためには、見えているバリオンだけではなく、見えない暗黒物質が銀河を覆っていなければいけないことになる。暗黒物質は電磁波ではまったく観測できないことから、質量は持っているが他の物質との相互作用が非常に弱いと考えられている。暗黒物質の候補としては、

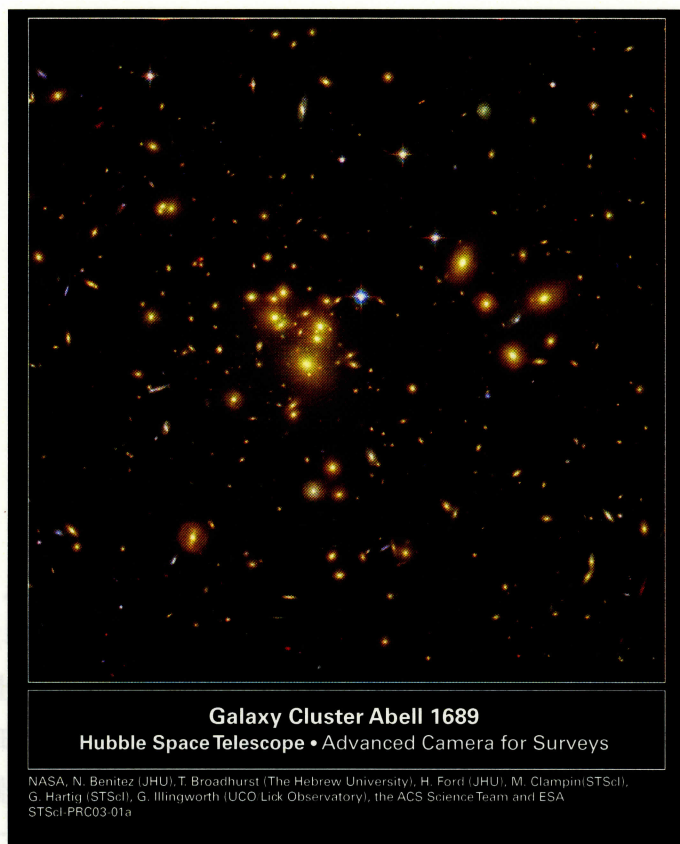


図 1.1 ハッブル望遠鏡で撮影された銀河団 Abell 1689

これまで褐色矮星などの MASSive Compact Halo Object (MACHO) やニュートリノが考えられてきたが、現在では未知の素粒子 (weakly interacting massive particle; WIMP) ではないかと考えられている。また、暗黒物質には、暗黒物質粒子が相対論的である hot dark matter (HDM) と非相対論的である cold dark matter (CDM) という区別がある。暗黒物質が HDM であるとする、小さなスケールでの密度ゆらぎが成長しなくなってしまうので、暗黒物質は CDM であると考えられる。

暗黒物質は相互作用が非常に弱いと考えられているが、宇宙の構造形成においてはなくてはならないものであるということが、シミュレーション結果からわかってきている。まず、初期宇宙で暗黒物質の密度がわずかに濃い部分では、まわりよりも重力が強いため、次第に暗黒物質が引き寄せられポテンシャルが深くなる。バリオンには相互作用があるので圧力が生じるが、暗黒物質のポテンシャルが深くなるとバリオンもそこに落ちていき、現在観測されている銀河団や銀河が作られることになる。

このような形成過程から、銀河団には暗黒物質ハローが付随している。電磁波で観測で

きない暗黒物質が、銀河団にどのように分布しているのかを知る手段としてもっとも有力な方法が重力レンズである。重力レンズとは観測者と遠方の銀河の間に質量分布が存在すると、遠方の銀河の形が歪んで見えたり、明るく見えたりする現象である。重力レンズには、遠方銀河の形の歪みが大きい、強い重力レンズ (strong lensing) と形の歪みが小さい、弱い重力レンズ (weak lensing) の 2 つがある。この論文では後者の弱い重力レンズを扱っていく。弱い重力レンズでは銀河 1 つ 1 つの形の歪みは小さいので、多くの背景銀河のデータを平均することで重力レンズの信号を取り出し、重力レンズを起こしている銀河団の質量などを知ることができる。一方、暗黒物質粒子を考慮した  $N$  体シミュレーションによると、銀河団や銀河に付随する暗黒物質ハローの質量分布は 3 軸不等なモデルでよくフィットできることが示されている。さらに、それらの 3 軸不等な暗黒物質ハローを観測すると、天球上では必ず楕円形になることが理論的に示されている。その楕円の長軸、短軸の比  $q$  の分布関数も、宇宙モデルにしたがって計算することができるので、観測によって  $q$  の分布関数を求めることができるならば、宇宙モデルを制限することができることになる。そこで、この論文では天球に投影された銀河団スケールの暗黒物質ハローの  $q$  を、弱い重力レンズで得られたデータを用いて決定する方法を考えていく。

この論文では、第 2 章で重力レンズの基礎知識となる一般相対性理論や宇宙論の基本事項をまとめる。第 3 章では、重力レンズとはどのような現象なのかということをもとめる。第 4 章では、初期密度ゆらぎから成長して銀河団スケールの暗黒物質ハローとなる過程についてまとめる。第 5 章では、球対称な暗黒物質ハローと 3 軸不等な暗黒物質ハローの密度分布の特徴と、そのようなハローによって生じる背景銀河の形の歪み  $\gamma$  の計算方法についてまとめる。第 6 章では、3 軸不等なハローを天球に投影したときの  $q$  などの分布関数と、それを球対称なハローをつぶしたものとして解釈したときの、質量などの分布関数の計算結果について述べる。第 7 章では、理論的な  $q$  の決定方法と、それを実際の観測データに適用したときの計算結果を述べる。第 8 章では、観測データに適用した結果を踏まえた考察を述べる。





## 第2章

# 一般相対性理論と膨張宇宙

### 2.1 フリードマン方程式

宇宙そのものの運動や、宇宙の構成について考えるためには、一般相対性理論を用いなければならない。それは、宇宙の運動を支配するもっとも重要な力は重力であり、時空と重力の関係を明らかにした理論だからである。

アインシュタイン方程式を書き下すと次のように書ける。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

この式の左辺は時空の構造、右辺1項目は物質場を、2項目は宇宙項を表している。ただし、光速を  $c=1$  とした。このアインシュタイン方程式を宇宙に適用するには、メトリックを決めておく必要があるが、それはどのような宇宙モデルを考えるのかによる。ここでは、第0近似として一様等方モデルを考えることにする。このモデルでのメトリックは次のように書ける。

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2 \quad (2.2)$$

$a(t)$  はスケールファクターと呼ばれる量で、宇宙の大きさを表す時間の関数である。現在 ( $t=t_0$ ) で  $a(t_0)=1$  となるように規格化する。 $dl^2$  は4次元時空の中の、空間方向の微小距離の2乗を表している。このときの空間とは、宇宙膨張にともなっていっしょに膨張する座標系、共動座標系で表される。また、 $dl$  は空間の曲率 ( $K$ ) によって異なってくる。具体的には、極座標系で表すと次のように書ける。

$$dl^2 = d\chi^2 + f_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.3)$$

$$f_K(\chi) = \begin{cases} K^{-1/2} \sin(K^{1/2}\chi) & (K > 0) \\ \chi & (K = 0) \\ (-K^{1/2}) \sinh((-K^{1/2})\chi) & (K < 0) \end{cases} \quad (2.4)$$

(2.1) と (2.2) からは、2つの独立な  $a(t)$  についての方程式、フリードマン方程式が得られる。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.6)$$

これらの方程式は  $a(t)$  についての微分方程式なので、方程式を解くことによって宇宙の大きさの時間変化を知ることができる。

## 2.2 宇宙論パラメーター

フリードマン方程式は、いくつかのパラメーターを導入すると、よりわかりやすくなる。

ある時刻の宇宙の大きさに対して、そのときの膨張率を示す量として、ハッブルパラメーターを導入することができる。

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.7)$$

ハッブルパラメーターの現在の値は  $H(t_0) = H_0$  とする。 $H_0$  の値は完全に決定されているわけではなく、不定性が含まれているので、 $100\text{km/s/Mpc}$  を単位として、 $H_0 = 100h \text{ km/s/Mpc}$  と表される。

このハッブルパラメーターを用いると、臨界密度という量を定義することができる。

$$\frac{3H_0^2}{8\pi G} \equiv \rho_{\text{cr},0} \quad (2.8)$$

物理定数を代入して臨界密度の値を計算すると、

$$\rho_{\text{cr},0} = 1.879h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} \quad (2.9)$$

$$= 2.775h^2 \times 10^{11} M_\odot \text{Mpc}^{-3} \quad (2.10)$$

$$= 8.098h^2 \times 10^{-11} \text{eV}^4/(\hbar c)^3 \quad (2.11)$$

が求まる。

さらに、現在の物質密度を臨界密度で割って無次元化した量として、密度パラメーター  $\Omega_0$  を考えることができる。

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{cr},0}} \quad (2.12)$$

宇宙項に対しても同様に考えて、密度パラメーターを定義することができる。

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (2.13)$$

これらの定義したパラメーターを使うと、式 (2.5) を次のように書き直すことができる。

$$H^2(t) = H_0^2 \left[ \Omega_0 a^{-3}(t) - a^{-2}(t) \frac{Kc^2}{H_0^2} + \Omega_\Lambda \right] \quad (2.14)$$

この式を現在  $t = t_0$  で評価すると、曲率  $K$  は宇宙論パラメータ  $\Omega_0, \Omega_\Lambda$  で表すことができる。

$$\begin{aligned} H_0^2 &= H_0^2 \left[ \Omega_0 - \frac{Kc^2}{H_0^2} + \Omega_\Lambda \right] \\ \therefore K &= \left( \frac{H_0}{c} \right)^2 (\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1) \end{aligned} \quad (2.15)$$

すると、式 (2.14) は  $\Omega_0, \Omega_\Lambda$  を用いて次のように書ける。

$$H^2(t) = H_0^2 \left[ \Omega_0 a^{-3}(t) - a^{-2}(t)(1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda \right] \quad (2.16)$$

## 2.3 物質と輻射

フリードマン方程式 (2.5), (2.6) を組み合わせると、次のような密度  $\rho$  と圧力  $p$  の関係式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\vec{x}, t) a^3(t)] + p(\vec{x}, t) \frac{da^3(t)}{dt} = 0 \quad (2.17)$$

$a^3(t)$  を共動座標系で固定されたある体積だとすると、左辺 1 項目はある時刻における内部エネルギーの変化率、2 項目は外部に対してする仕事率を表していると考えることができ、これは、外部との熱のやりとりがない場合における熱力学の第 1 法則に対応している。

宇宙膨張とともに密度  $\rho(t)$  がどのように変化するかを求めるためには、(2.17) だけでは方程式は閉じていないので、状態方程式  $p = p(\rho)$  が必要になる。この状態方程式は、密度に寄与している成分が非相対論的な物質か輻射かで異なってくる。まず、非相対論的な物質の場合、速度分散が小さいので  $p \ll \rho c^2$  が成り立ち  $p = 0$  と考えられる。一方、輻射や相対論的な物質の場合、 $p = \frac{1}{3} \rho c^2$  と表される。すると、(2.17) と状態方程式から

$$\rho(t) \propto \begin{cases} a^{-3}(t) & (\text{物質}) \\ a^{-4}(t) & (\text{輻射}) \end{cases} \quad (2.18)$$

という関係が求まる。この関係は、方程式を解くことをしなくても物理的な解釈によって得ることができる。つまり、物質の場合は、密度が体積に反比例するが、その体積は宇宙膨張とともに  $a^3$  で増えていくので  $\rho_m(t) \propto a^{-3}$  となる。また、radiation の場合、体積が宇宙膨張とともに増えていくことに加えて、エネルギーが反比例する波長が赤方偏移によって、 $a$  に比例して長く観測されることから、 $\rho_r \propto a^{-4}$  となる。

ここまで、フリードマン方程式の密度に寄与する成分として、宇宙膨張とともに  $a^{-3}$  で薄まる物質と  $a^{-4}$  で薄まる相対論的な成分に分けて考えたが、さらにそれぞれを細かく分類することができる。

まず、物質の1つにバリオンがある。バリオンとは宇宙に存在するすべての原子核のことを言い、星や銀河を作る元となる。バリオンの存在量は光との相互作用を通して、いくつかの独立な観測によって求められている。それらの観測結果はほぼ一致していて、臨界密度の比で表すと、

$$\Omega_{b,0} \equiv \frac{\rho_{b,0}}{\rho_{cr,0}} \sim 2\% - 5\% \quad (2.19)$$

であることがわかっている。一方、光との相互作用によらずに、重力場を通して物質の存在量を測る観測結果によると、物質の臨界密度に対する比は、

$$\Omega_{m,0} \equiv \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{cr,0}} \sim 30\% \quad (2.20)$$

であると推定されている。したがって、物質の成分としては電磁波によって観測できるバリオンよりも、電磁波とは相互作用しない暗黒物質が大きな割合を占めていることがわかる。

次に、相対論的な成分としては光子とニュートリノが考えられる。そのうち光子については、宇宙背景放射、CMB(cosmic microwave background)の詳細な観測によって、エネルギー分布が黒体放射によるものであり、その温度がおおよそ  $T = 2.725(\text{K})$  であることがわかっている。また、光子がボーズ粒子であることを使うと、エネルギー密度を計算することができる。

$$\begin{aligned} \rho_{\text{CMB},0} &= 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p}{\exp(p/kT_{\text{CMB},0}) - 1} \\ &= \frac{8\pi(kT_{\text{CMB},0})^4}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} \\ &= \frac{\pi^2 (kT_{\text{CMB},0})^4}{15 \hbar^3} \\ &= 2.47 \times 10^{-5} h^{-2} \rho_{cr} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\therefore \Omega_{\text{CMB},0} = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2} \quad (2.22)$$

ここで、3行目の等式は、2行目の積分が $\zeta$ 関数を用いて  $\pi^4/15$  となることによる。 $\Omega_{\text{CMB}}$  は、現宇宙における臨界密度に対するエネルギー密度の比を表す。もう1つの相対論的な成分であるニュートリノは、相互作用は非常に小さいことから光子とは違い、CMBのような直接的な観測はない。しかし、現在知られている物理からエネルギー密度を計算することができる。初めに、ニュートリノがプラズマと相互作用している宇宙初期

を考える。そこでは、光子や電子などが熱平衡状態になっていて、それぞれの温度は等しくなっている。その後、宇宙の温度が次第に下がっていくと、ニュートリノは相互作用が弱いことからプラズマとの平衡状態から切れることとなる。さらに宇宙の温度が下がり電子の質量と同じくらい  $kT \sim 0.5\text{MeV}$  まで下がると、電子と陽電子は対消滅して光子になる ( $e^- + e^+ \rightarrow \gamma$ )。すると、対消滅によって新しい光子が生成されるので、光子の温度とニュートリノの温度は同一ではなくなる。ニュートリノのエネルギー密度を計算するためには、異なる CMB の温度  $T_{CMB}$  とニュートリノの温度  $T_\nu$  を結びつける必要があるが、そのためには、電子、陽電子の対消滅前後におけるエントロピーについて考察する必要がある。

エントロピー密度をエネルギー密度  $\rho$  と圧力  $P$  を用いて  $s \equiv (\rho + P)/T$  と定義すると  $sa^3$  は宇宙膨張に対して不変となる。これは、次のように示すことができる。

圧力  $P$  は、分布関数  $f(\vec{x}, \vec{p})$  の積分として次のように表すことができる。

$$P = g \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} f(\vec{x}, \vec{p}) \frac{p^2}{3E(p)} \quad (2.23)$$

ここで、 $g$  は縮重度を表す。粒子の化学ポテンシャル  $\mu$  が温度  $T$  よりも十分小さいとすると、分布関数は  $E/T \equiv y$  の関数となる。このとき、分布関数を  $T$  や  $E$  で微分すると次のような関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial T} &= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial T} = -\frac{E}{T^2} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial E} &= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial E} = \frac{1}{T} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \therefore \frac{\partial f}{\partial T} &= -\frac{E}{T} \frac{\partial f}{\partial E} \end{aligned} \quad (2.24)$$

この関係式を用いると、圧力  $P$  を温度  $T$  で微分したものは次のように式変形することが

できる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial T} &= g \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\partial f}{\partial T} \frac{p^2}{3E} = g \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \left( -\frac{E}{T} \frac{\partial f}{\partial E} \right) \frac{p^2}{3E} \\
&= -\frac{1}{T} g \int \frac{d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \int dp \frac{\partial f}{\partial E} \frac{p^4}{3} \\
&= -\frac{1}{T} g \int \frac{d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \int E dE \frac{\partial f}{\partial E} \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{3} \\
&= -\frac{1}{T} g \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ \frac{1}{3} E (E^2 - m^2)^{3/2} f \right]_0^\infty \right. \\
&\quad \left. - \int dE \left( \frac{1}{3} (E^2 - m^2)^{3/2} + E^2 (E^2 - m^2)^{1/2} \right) f \right\} \\
&= \frac{1}{T} g \int \frac{d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \left( \int p^2 dp f E + \int p^2 dp f \frac{p^2}{3E} \right) \\
&= \frac{1}{T} \left( g \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} f E + g \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} f \frac{p^2}{3E} \right) \\
&= \frac{\rho + P}{T}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

ここで、(2.17) を次のように変形する。

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho(\vec{x}, t) + P(\vec{x}, t)) a^3(t)] - a^3(t) \frac{\partial P(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \tag{2.26}$$

左辺 2 項目の圧力  $P$  の時間微分を温度についての微分に変えると、 $sa^3$  が保存することを導くことができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} [(\rho + P) a^3] - a^3 \frac{dT}{dt} \frac{\partial P}{\partial T} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} [(\rho + P) a^3] - a^3 \frac{dT}{dt} \frac{\rho + P}{T} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho + P}{T} a^3 \right] &= 0
\end{aligned}$$

したがって、 $sa^3$  は保存量である。

ここで、相対論的なボーズ粒子とフェルミ粒子のエネルギー密度と圧力の関係を考える。どちらの粒子の場合も、

$$\begin{aligned}
\rho &= g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} E(p) f_i(\vec{x}, \vec{p}) \\
&= g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} p f_i(\vec{x}, \vec{p})
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
P &= g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} f_i(\vec{x}, \vec{p}) \frac{p^2}{3E(p)} \\
&= g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} f_i(\vec{x}, \vec{p}) \frac{p}{3}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

となるので、 $P = \rho/3$  という関係があることがわかる。

すると、質量 0 のボーズ粒子の 1 つのスピンの状態のエントロピー密度は、 $P = \rho/3$  という関係式から次のようにして計算することができる。

$$\begin{aligned}
 \rho &= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p}{\exp(p/kT) - 1} \\
 &= \frac{\pi^2 k^4 T^4}{30 \hbar^3} \\
 P &= \rho/3 \\
 s &= \frac{\rho + P}{T} = \frac{2\pi^2 k^4}{45\hbar^3} T^3
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

一方、質量 0 のフェルミ粒子の場合は、

$$\begin{aligned}
 \rho &= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p}{\exp(p/kT) + 1} \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{p^3}{\exp(p/kT) + 1} dp \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} (kT)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x) + 1} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} (kT)^4 \int_0^\infty dx \left[ \frac{x^3}{\exp(x) - 1} - \frac{2x^3}{\exp(2x) - 1} \right] \\
 &= \frac{7\pi^2}{8 \cdot 30} \\
 P &= \rho/3 \\
 s &= \frac{\rho + P}{T} = \frac{7}{8} \frac{2\pi^2 k^4}{45\hbar^3} T^3
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

となる。相対論的な粒子 ( $m \gg kT$ ) の場合は、

$$\begin{aligned}
 \rho &= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{\exp(\sqrt{m^2 + p^2}/kT) \pm 1} \\
 &\simeq \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m + p^2/2m}{\exp(m + p^2/2m)/kT \pm 1} \\
 &\simeq e^{-m/kT} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} (m + p^2/2m) e^{-p^2/2mkT}
 \end{aligned}$$

なので、その寄与は無視することができる。すると、対消滅前 ( $a_1$ ) に存在する相対論的な粒子のうち、フェルミ粒子には 2 つのスピンの状態をもつ電子、陽電子、1 つのスピンの状態を持ち 3 つの世代があるニュートリノと反ニュートリノ、ボーズ粒子には 2 つのスピンの状態



態を持つ光子がある。これらの寄与をすべて合わせると、対消滅前のエントロピー密度は

$$\begin{aligned} s(a_1) &= \frac{2\pi^2}{45} \frac{k^4 T_1^3}{\hbar^3} [2 + (7/8)(2 + 2 + 3 + 3)] \\ &= \frac{43\pi^2}{90} \frac{k^4 T_1^3}{\hbar^3} \end{aligned} \quad (2.31)$$

と求まる。ここで、 $T_1$  は対消滅前の平衡状態の温度を表す。対消滅後 ( $a_2$ ) では、光子とニュートリノだけが存在しているので、このときのエントロピー密度は

$$s(a_2) = \frac{2\pi^2}{45} \frac{k^4}{\hbar^3} \left[ 2T_\gamma + \frac{7}{8} 6T_\nu^3 \right] \quad (2.32)$$

となる。 $T_\gamma, T_\nu$  は対消滅後の光子とニュートリノの温度を表す。(2.27) から、対消滅の前後でエントロピーは保存されるので、

$$\frac{43}{2} (a_1 T_1)^3 = 4 \left[ \left( \frac{T_\gamma}{T_\nu} \right) + \frac{21}{8} \right] (T_\nu (a_2) a_2)^3 \quad (2.33)$$

が成り立つ。ここで、ニュートリノの温度は、宇宙膨張とともに冷えていくので  $a_1 T_1 = a_2 T_\nu(a_2)$  が成り立つ。よって、対消滅後の光子とニュートリノの温度の比は

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left( \frac{4}{11} \right)^{1/3} \quad (2.34)$$

となることがわかる。今、ニュートリノの温度は光子の温度の  $(4/11)^{1/3}$  倍であり、同じ温度のフェルミ粒子のエネルギー密度はボーズ粒子の  $(7/8)$  倍であることがわかっている。また、光子のスピン状態は2つであるのに対して、ニュートリノの場合は1つのスピン状態をもつものが3つとその反粒子がある。これらを考慮すると、ニュートリノのエネルギー密度  $\rho_\nu$  は光子のエネルギー密度  $\rho_\gamma$  を用いて、

$$\rho_\nu = 3 \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^4 / 3 \rho_\gamma \quad (2.35)$$

と表すことができる。これら質量0のニュートリノが存在しているとすると、現在の宇宙のエネルギー密度への寄与は

$$\Omega_{\nu,0} \equiv \frac{\rho_{\nu,0}}{\rho_{\text{cr},0}} = \frac{1.68 \times 10^{-5}}{h^2} \quad (2.36)$$

となる。

しかし、近年の太陽ニュートリノの観測によると、地球に到達するまでにあるニュートリノが別のニュートリノに変化するニュートリノ振動が起きていることがわかってきた。これはニュートリノに質量がある場合にしか起こらない現象なので、ニュートリノ振動はニュートリノが質量を持っていることを示している。

ニュートリノが質量を持っているときのエネルギー密度は、質量を  $m_\nu$ 、数密度を  $n_\nu$  とすると、 $\rho_\nu = m_\nu n_\nu$  となる。エネルギー密度の場合と同様に計算すると、ニュートリノの数密度  $n_\nu$  と光子の数密度  $n_\gamma$  の比を計算することができる。

$$\begin{aligned} n_\gamma &= 2 \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp(p/kT_\gamma) - 1} \\ &= \frac{1}{\pi^2} (kT_\gamma)^3 \int dx \frac{x^2}{\exp(x) - 1} \\ &= \frac{2!}{\pi^2} \zeta(3) (kT_\gamma)^3 \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} n_\nu &= 2 \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp(p/kT_\gamma) + 1} \\ &= \frac{1}{\pi^2} (kT_\nu)^3 \int dx \frac{x^2}{\exp(x) + 1} \\ &= \frac{1}{\pi^2} (kT_\nu)^3 \int dx \left[ \frac{x^2}{\exp(x) - 1} - \frac{2x^2}{\exp(2x) - 1} \right] \\ &= \frac{3}{4} \frac{2!}{\pi^2} \zeta(3) T_\nu(3) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\frac{n_\nu}{n_\gamma} = \frac{3}{4} \left( \frac{T_\nu}{T_\gamma} \right)^3 = \frac{3}{11} \quad (2.39)$$

CMB の観測結果  $T_\gamma = 2.725\text{K}$  を代入すると、 $n_\gamma = 410(\text{cm}^{-3})$ ,  $n_\nu = 112(\text{cm}^{-3})$  となる。すると、質量を持ったニュートリノの現在のエネルギー密度への寄与は、

$$\Omega_{\nu,0} = \frac{\rho_{\nu,0}}{\rho_{\text{cr},0}} \Big| = \frac{m_\nu}{94h^2\text{eV}} \quad (2.40)$$

となる。

## 2.4 赤方偏移

輻射が宇宙膨張によって赤方偏移の効果を受けることは、共動座標系での光子の伝播を考えることで理解することができる。共動座標系で  $w_e$  だけ離れた光源から時刻  $t_e$  に放射された光子が、時刻  $t_o$  に観測されたとする。光子の場合、メトリック (2.2) は  $ds = 0$  なので、 $w_e$  は、

$$w_e = \int_o^e dw = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a} \quad (2.41)$$

という積分で表される。ここで、光子が伝搬して来た距離  $w_e$  は共動座標系で考えていることから、定数である。次に、同じ光源から時刻  $t_e + dt_e$  に放射された光子が時刻  $t_o + dt_o$

に観測されたとすると、光子が伝搬して来た距離は  $w_e$  なので、

$$\begin{aligned}
 w_e &= \int_{t_e+dt_e}^{t_o+dt_o} \frac{dt}{a} \\
 &= \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a} + \frac{dt_o}{a(t_o)} - \frac{c dt_e}{a(t_e)} \\
 &= w_e + \frac{dt_o}{a(t_o)} - \frac{dt_e}{a(t_e)}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

となる。つまり、

$$\frac{dt_o}{dt_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \tag{2.43}$$

という関係式が得られる。光子の放射されたときと観測されたときの振動数をそれぞれ、 $\nu_e \equiv dt_e^{-1}$ ,  $\nu_o \equiv dt_o^{-1}$  と定義すると、微小時間間隔の比は光子の振動数の比として書ける。さらに、振動数の比は波長の比としても書けることから、

$$\frac{dt_o}{dt_e} = \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} \tag{2.44}$$

となる。赤方偏移  $z$  は、波長の変化に対して

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_o}{\lambda_e} \tag{2.45}$$

と定義されるので、赤方偏移とスケールファクターには

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \tag{2.46}$$

という関係がある。この式は、宇宙膨張によって観測される光の波長が長い方に偏移することを示している。

## 2.5 距離

ユークリッド空間にある2点間を結ぶ最短距離は、その2点を結ぶ直線となる。しかし、曲率を持った空間における2点間の距離を決めるのは、ユークリッド空間ほど容易ではない。また、膨張する宇宙においては、距離を定義する方法がいくつかある。ここでは、曲率を持ち、膨張する宇宙での距離の定義の仕方を4つ述べる。

- 固有距離 (proper distance)

固有距離 (proper distance) は、赤方偏移が  $z_2$  にある光源から出発した光子が、 $z_1$  にいる観測者に進んだまでに進んだ距離として定義される。微小時間  $dt$  の間に光

子が進む距離は  $dD_{\text{prop}} = -dt$  と書けるが、 $dt$  はスケールファクターやハッブルパラメーターを用いて  $dt = da/\dot{a} = da/(aH(a))$  となる。したがって、 $z_1$  と  $z_2$  の間の固有距離は  $dD_{\text{prop}}$  の積分として次のように書ける。

$$\begin{aligned} D_{\text{prop}}(z_1, z_2) &= \int_{z_1}^{z_2} dD_{\text{prop}} = \int_{a(z_2)}^{a(z_1)} \frac{da}{aH(a)} \\ &= \frac{1}{H_0} \int_{a(z_2)}^{a(z_1)} \frac{da}{\sqrt{\Omega_0 a^{-1} - (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda a^2}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

- 共動距離 (comoving distance)

共動距離 (comoving distance) は、宇宙膨張と同様に膨張する座標系、共動座標系測ったときの距離と定義される。式 (2.41) を導いたときと同じように考えると、微小時間  $dt$  の間に光子が観測者に向かって進んだ距離を共動座標系で表すと、 $dD_{\text{com}} = -dt/a$  となる。したがって、 $z_1$  と  $z_2$  の間の共動距離は  $dD_{\text{com}}$  を積分することで次のように書ける。

$$\begin{aligned} D_{\text{com}}(z_1, z_2) &= \int_{z_1}^{z_2} dD_{\text{com}} = \int_{a(z_2)}^{a(z_1)} \frac{da}{a^2 H(a)} \\ &= \frac{1}{H_0} \int_{a(z_2)}^{a(z_1)} \frac{da}{\sqrt{\Omega_0 a - (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) a^2 + \Omega_\Lambda a^4}} \end{aligned} \quad (2.48)$$

また、空間方向のメトリックを極座標系で考えたとき、 $D_{\text{com}}$  は  $\theta, \phi = \text{一定}$  で測ったものだから、式 (2.3) より  $D_{\text{com}}(z_1, z_2) = w(z_1, z_2)$  という関係がある。

- 角径距離 (angular-diameter distance)

角径距離 (angular-diameter distance) は、遠方にある物体の大きさとそれを見込む角度から求まる距離である。例えば、物理的な大きさが  $l$  である物体を  $D_{\text{ang}}$  だけ離れた位置から見たときに、その大きさが  $\theta(\text{rad})$  に見えたとすると、 $l, D_{\text{ang}}, \theta$  の間にはユークリッド空間での類推から

$$l = D_{\text{ang}} \theta$$

という関係がある。一方、メトリック (2.2)、(2.3) を用いて物体の大きさを考えた場合、物体の両端は  $t, w, \phi = \text{一定}$  であり、見掛け上  $\theta(\text{rad})$  だけ離れて見えたとすると、その物体の物理的な大きさ  $l$  は

$$l = a(z_2) f_K(\chi) \theta$$

と表すことができる。したがって、これら2つの式から  $D_{\text{ang}}$  は次のように書ける。

$$D_{\text{ang}}(z_1, z_2) = a(z_2) f_K(\chi) = a(z_2) f_K(D_{\text{com}}(z_1, z_2)) \quad (2.49)$$

- 光度距離 (luminosity distance)

まず、ユークリッド空間で考えると、光度  $L$  の光源がある距離  $d$  だけ離れたところ  
にあって、観測されるフラックスが  $F$  のとき、 $L, d, F$  の間には

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (2.50)$$

という関係がある。よって、光度  $L$  がわかっている場合には、フラックスの観測か  
ら光源までの距離  $d$  がわかることになる。

宇宙膨張の効果を考慮したときの光度距離は、

$$D_{\text{lum}}(z_1, z_2) = \left( \frac{a(z_1)}{a(z_2)} \right)^2 D_{\text{ang}}(z_1, z_2) \quad (2.51)$$

と表されることが知られている。この式は、物理的には次のように理解すること  
ができる。 $z_2$  にある光源から出た光子を  $z_1$  にいる観測者が観測したとし、その  
flux について考察する。光源を囲む光子が通過する球面の面積は、 $(a(z_1)/a(z_2))^2$   
倍広くなっている。このとき光子は宇宙膨張によって  $a(z_1)/a(z_2)$  だけ redshift  
を受ける。また、光子を受け取るときの時間間隔は放出されるときとの時間間隔  
の  $a(z_1)/a(z_2)$  倍となる。よって、フラックスは宇宙膨張がない場合と比べて  
 $(a(z_1)/a(z_2))^{-4}$  倍だけ小さくなることがわかる。

図 (2.1) は、 $\Lambda\text{CDM}(\Omega_0 = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7)$  モデル、 $\text{SCDM}(\Omega_0 = 1.0, \Omega_\Lambda = 0)$  モデルで  
のそれぞれの距離を赤方偏移 ( $z$ ) の関数としてプロットしたものである。

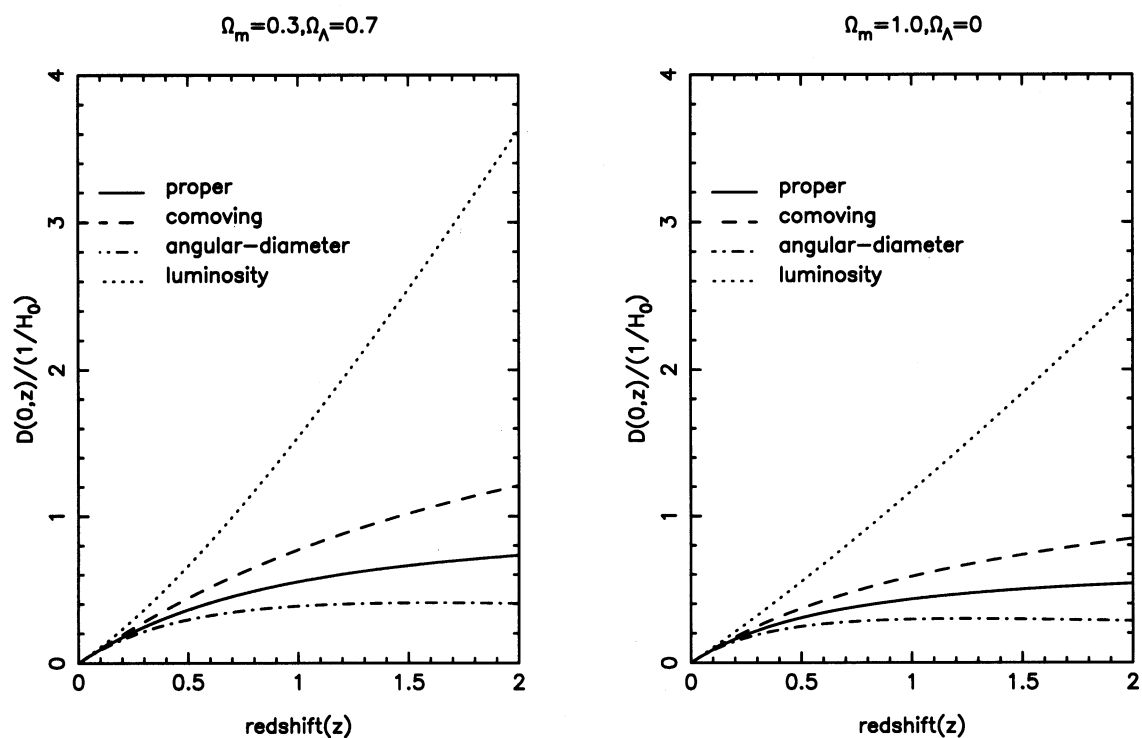


図 2.1 左: LCDM モデル ( $\Omega_0 = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$ ) における固有距離 (proper distance), 共動距離 (comoving distance), 角径距離 (angular-diameter distance), 光度距離 (luminosity distance) 右: SCDM モデル ( $\Omega_0 = 1.0, \Omega_\Lambda = 0$ )



## 第 3 章

# 重力レンズ

### 3.1 重力レンズの概観

相対性理論が登場する以前のニュートンの万有引力の法則は、

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.1)$$

と表されていた。この式は、質量が  $M$ 、 $m$  である 2 つの物体が距離  $r$  だけ離れていたときに物体間に働く力の大きさは、質量の積に比例し、距離の 2 乗に反比例することを示している。よって、質量が 0 である光子を考えたとき、光子には万有引力は働かず、光子は直進することになる。ところが、一般相対性理論では状況がまったく異なってくる。アインシュタイン方程式 (2.1)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

は、右辺の物質分布によって左辺の時空の構造が決まるということを表している。例えば、質量  $M$  の天体がある場合、その質量によって天体まわりの空間の曲率が決まり、そこを光子が進むと曲率を持った空間に沿って運動するので、天体の重力によって光子の軌道が曲げられることになる。

図 3.1 のように太陽のような質点近似のできる質量  $M$  の天体の近傍を光子が通るとき、光子の軌道がどのくらい曲げられるかを考える。このような天体によって光子の軌道が曲げられる角度  $\hat{\alpha}$  は、インパクトパラメーターを  $\xi$  とすると、

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{\xi} \quad (3.2)$$

と表される。(詳細な導出は付録 A を参照)



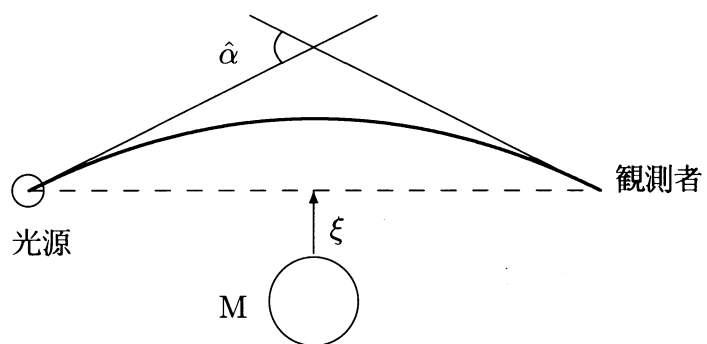


図 3.1 質量  $M$  の天体の近傍を通過する光の経路の弯曲

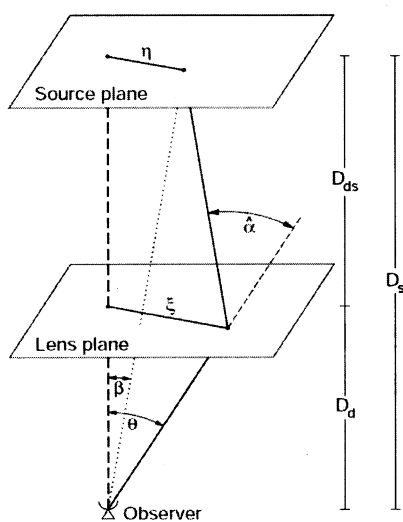


図 3.2 Bartelmann&Schneider(1999) より。3次元の質量分布を持った構造が起こす重力レンズの概念図

次に、光子の軌道を曲げる天体が質点近似のできない、3次元の質量分布を持った、銀河団のような構造を考える。図(3.2)のように、光源とレンズの役割を果たす構造(レンズ天体)が、観測者からそれぞれ  $D_s$ 、 $D_d$ (角径距離)の距離にあり、そのほかには物質はないとする。レンズ天体の視線方向の質量の広がりが  $D_d$ 、 $D_{ds}$  に比べて十分に薄い場合は、レンズ天体の質量は平面上 (lens plane) に分布していると近似することができる。すると、本来は緩やかに曲がったものとなる光子の軌道は、光源とレンズ天体、観測者とレンズ天体を結ぶ軌道を直線で近似することができる。

このようなレンズ天体によって生じる屈折角  $\hat{\alpha}$  を求めるとき、レンズ天体を微小部分に分け、それぞれの部分の寄与の和として考える。これは、重力場が弱い場合、一般相対論を線形化することができることによる。レンズ天体の3次元質量密度を  $\rho(\vec{r})$ 、微小部分の体積を  $dV$  とすると、 $dV$  に含まれる微小質量  $dm$  は  $dm = \rho(\vec{r})dV$  となる。また、光子の軌道の座標をパラメーターを  $\lambda$  として  $(\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), r_3(\lambda))$  と表す。座標系は、光子が  $r_3$  に沿って入射するようにとってある。光子が質量分布がある近傍を通過するときには、実際にはその軌道が曲げられるが、軌道の変化が非常に小さく直線によって近似することができる場合、 $\vec{\xi}(\lambda) = \vec{\xi}$  となり、パラメーター  $\lambda$  には依存しなくなる。すると、 $\vec{r} = (\xi'_1, \xi'_2, r'_3)$  にある微小質量  $dm$  に対するインパクトベクトルは  $\vec{\xi} - \vec{\xi}'$  という2次元のベクトルになる。したがって、広がった質量分布を持つレンズ天体による屈折角  $\vec{\alpha}(\vec{\xi})$  は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(\vec{\xi}) &= 4G \sum dm(\xi'_1, \xi'_2, r'_3) \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} \\ &= 4G \int d^2\xi' \int dr'_3 \rho(\xi'_1, \xi'_2, r'_3) \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}\end{aligned}\quad (3.3)$$

2行目の  $r'_3$  についての積分を面密度  $\Sigma(\vec{\xi}')$

$$\Sigma(\vec{\xi}') \equiv \int dr'_3 \rho(\xi'_1, \xi'_2, r'_3)\quad (3.4)$$

として定義すると、屈折角は

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = 4G \int d^2\xi' \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}\quad (3.5)$$

とまとめることができる。

## 3.2 レンズ方程式

前のセクションで、ある質量分布を持つレンズ天体によって、それよりも遠方にある光源から届く光子の軌道は屈折角  $\hat{\alpha}$  だけ曲げられることを見た。ここでは、天球面上でレ

レンズ天体がなければ観測された位置  $\vec{\beta}$  と、レンズ天体があることで観測される位置  $\vec{\theta}$  の間にどのような関係があるのかを考えていく。

まず、図 (3.2) のように、ソースプレーン、レンズプレーンが観測者とそれらを結ぶ直線に対して直交するように定義されているとする。そして、ソースプレーン上での光源の位置を表す2次元ベクトルを  $\vec{\eta}$  とすると、 $\vec{\eta}$  は  $\vec{\xi}$  と  $\vec{\alpha}$  を用いて、

$$\vec{\eta} = \frac{D_s}{D_d} \vec{\xi} - D_{ds} \vec{\alpha}(\vec{\xi}) \quad (3.6)$$

と表すことができる。

一方、 $\vec{\eta}$  や  $\vec{\xi}$  は  $\vec{\beta}$ 、 $\vec{\theta}$  を用いると、 $\vec{\eta} = D_s \vec{\beta}$ 、 $\vec{\xi} = D_d \vec{\theta}$  となる。この関係を使うと (3.6) を

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s} \vec{\alpha}(D_s \vec{\theta}) \equiv \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}) \quad (3.7)$$

のように書き換えることができる。ここで、屈折角  $\vec{\alpha}$  を定義し直した。(3.7) はレンズ方程式と呼ばれていて、 $\vec{\beta}$  の位置にある光源は、(3.7) を満たすような  $\vec{\theta}$  の位置に観測されるということを示している。

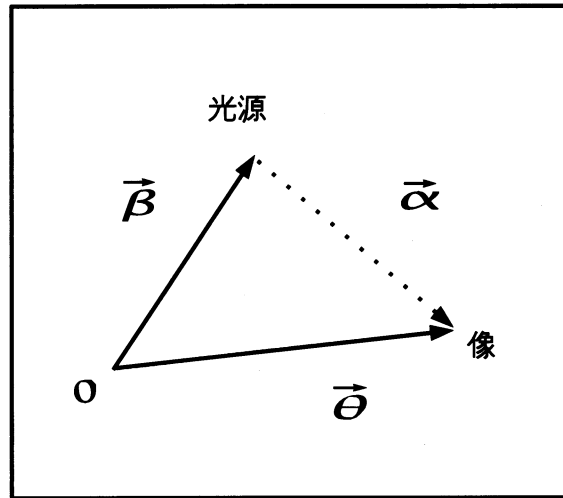


図 3.3 天球面上での  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\theta}$  と  $\vec{\alpha}$  の関係。 $\vec{\beta}$  の位置に光源があったとき、レンズ天体の重力場によって光路が曲げられ、 $\vec{\alpha}$  だけずれた  $\vec{\theta}$  の位置に像が観測される。

$\vec{\xi} = D_d \vec{\theta}$  という関係を用いて  $\vec{\alpha}$  を書き換えると、次のようになる。

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= \frac{D_{ds}}{D_s} \vec{\alpha}(D_d \vec{\theta}) \\ &= 4G \frac{D_{ds} D_d}{D_s} \int d^2 \theta' \Sigma(D_d \vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2}\end{aligned}\quad (3.8)$$

ここで、

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{\Sigma(D_d \vec{\theta})}{\Sigma_{cr}}, \quad \Sigma_{cr} = \frac{1}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} \quad (3.9)$$

という量を定義する。 $\Sigma_{cr}$  は臨界面密度、 $\kappa$  は無次元面密度と呼ばれている。レンズ天体の質量分布に  $\kappa \geq 1$  となるような領域があると、レンズ方程式 (3.7) は複数の解  $\vec{\theta}$  を持ち、いくつかのイメージが生じることがある。よって、 $\kappa$  の値は、重力レンズ効果が 'weak' なのか 'strong' なのかを区別するための指標になる。

屈折角はこの  $\kappa$  を用いると次のようにまとめることができる。

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2 \theta' \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} \quad (3.10)$$

さらに、

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2 \theta' \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'| \quad (3.11)$$

というポテンシャルを導入すると、 $\vec{\alpha}$  は  $\vec{\alpha} = \nabla \psi$  と表すことができる。また、 $\psi$  と  $\kappa$  はポアソン方程式  $\nabla^2 \psi(\vec{\theta}) = 2\kappa(\vec{\theta})$  で関係づけられている。

### 3.3 シアーと拡大率

ここまで、光源と観測者の間に質量を持ったレンズ天体が存在していた場合に、実際の光源の位置と観測される位置がどの程度ずれるのかを考え、その関係を表すレンズ方程式を求めた。ここからは、銀河などの光源と観測者の間に、銀河団などの構造があった場合に、銀河の形や大きさにどのような影響があるのかをレンズ方程式を用いて考えていく。

まず、形に対する効果から考えていく。光源からの光が重力レンズ効果を受けたとき、光子の吸収や新しい光子の放出という現象は起こらないので、銀河の表面輝度 (surface brightness) は保存されることになる。よって、ソースプレーン上での表面輝度の分布を  $I^{(s)}(\vec{\beta})$  と表すと、レンズプレーン上の観測される表面輝度  $I(\vec{\theta})$  との間に、

$$I(\vec{\theta}) = I^{(s)}(\vec{\beta}(\vec{\theta})) \quad (3.12)$$

という関係がある。また、光源の角度スケールがレンズの性質が変化するスケールに対して十分小さいとすると、レンズプレーン上の像のソースプレーンへの投影は線形化して考えることができる。このとき、像の歪み方はヤコビアン行列によって表現することができる。

$$\mathcal{A}(\vec{\theta}) = \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

ここで、 $\gamma_1, \gamma_2$  はポテンシャル  $\psi(\vec{\theta})$  の2階微分によって定義される。

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\psi_{,11} - \psi_{,22}), \quad \gamma_2 = \psi_{,12} \quad (3.14)$$

また、 $\gamma_1, \gamma_2$  はシアー  $\gamma$  の2つの成分を表している。

$$\gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2 = |\gamma|e^{2i\varphi} \quad (3.15)$$

光源と像の輝度分布の関係 (3.12) と射影を表す行列 (3.13) から、像の形が光源の形から変形することが理解できる。像の中のある点を  $\vec{\theta}_0$  とし、それに対応する光源の点を  $\vec{\beta}(\vec{\theta}_0)$  とすると、像の輝度分布は

$$I(\vec{\theta}) = I^{(s)}[\vec{\beta}_0 + \mathcal{A}(\vec{\theta}_0) \cdot (\vec{\theta} - \vec{\theta}_0)] \quad (3.16)$$

と表すことができる。光源を円形としたとき、もしレンズ天体がなかったとしたら  $\vec{\theta} = \vec{\beta}$  なので、像も当然円形となる。しかし、レンズ天体があったとき、(3.16) の行列  $\mathcal{A}(\vec{\theta}_0)$  からわかるように、像は楕円形となる。そのような楕円形の短軸、長軸の、もとの光源の半径に対する比は行列  $\mathcal{A}$  の固有値  $1 - \kappa \pm |\gamma|$  の逆数で与えられる。

次に、大きさに対する効果について考える。光源と観測される像のすべてのフラックスは、輝度分布  $I^{(s)}(\vec{\beta})$ 、 $I(\vec{\theta})$  をそれぞれの領域で積分すればよい。積分する領域の面積は、行列  $\mathcal{A}$  によって変化し、光源の領域に対する像の領域の面積の比は  $\det \mathcal{A}$  の逆数で与えられる。この値は拡大率  $\mu(\vec{\theta}_0)$  と考えることができる。実際に  $\mu$  を計算すると、

$$\mu = \frac{1}{|\det \mathcal{A}|} = \frac{1}{|(1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2|} \quad (3.17)$$

と求まる。

このように、光源と観測者の間にレンズ天体があり、光源が重力レンズ効果を受けると、もとのかたちと大きさにその効果が現れた像が観測される。その効果を表すのが行列  $\mathcal{A}$  であるが、 $\mathcal{A}$  は次のように2つの行列の和に分けることができる。

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

右辺 1 項目は等しい対角成分を持つ行列なので、光源の形を保存したまま大きさだけを変化させる。2 項目は対称で対角成分の和が 0 となる (trace-free) 行列である。対称、trace-free という性質から、光源の大きさは変えずに形だけを変化させる。光源の形の歪みは  $\gamma$  で表される重力場の潮汐力によって生じる。一方、拡大率は、局所的な質量分布  $\kappa$  による等方的な成分と、 $\gamma$  で表される非等方的な成分の 2 つによって引き起こされる。

像の歪み  $\gamma$  とレンズの質量分布  $\kappa$  は、ともにポテンシャルの 2 階微分で表される量であることから、それらの間にはなんらかの関係がありそうだと考えられる。実際、(3.11) と (3.14) を組み合わせると、

$$\gamma(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\theta' \mathcal{D}(\vec{\theta} - \vec{\theta}') \kappa(\vec{\theta}') \quad (3.19)$$

$$\mathcal{D}(\vec{\theta}) \equiv \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2 - 2i\theta_1\theta_2}{|\vec{\theta}|^4} = \frac{-1}{(\theta_1 - i\theta_2)^2} \quad (3.20)$$

という関係式が得られる。(3.19) は、 $\kappa$  のマップを  $\mathcal{D}$  をカーネルとして畳み込むと  $\gamma$  のマップが得られるということを表している。しかし、観測量は左辺の  $\gamma$  なので、逆変換をすると  $\gamma$  のマップから  $\kappa$  のマップ (質量分布) を得ることができる。 $\gamma$  と  $\kappa$  はポテンシャル  $\psi(\vec{\theta})$  の 2 階微分で表されることから、これらをフーリエ変換すると、

$$\hat{\gamma}_1 = -\frac{l_1^2 - l_2^2}{2} \hat{\psi}(\vec{l}) \quad (3.21)$$

$$\hat{\gamma}_2 = -l_1 l_2 \hat{\psi}(\vec{l}) \quad (3.22)$$

$$\hat{\kappa} = -\frac{l_1^2 + l_2^2}{2} \hat{\psi}(\vec{l}) = -\frac{l^2}{2} \hat{\psi}(\vec{l}) \quad (3.23)$$

となる。また、畳み込みのフーリエ変換は、 $\mathcal{D}$  と  $\kappa$  のフーリエ変換の積になる。

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{\pi} \hat{\mathcal{D}} \hat{\kappa} \quad (3.24)$$

したがって、カーネル  $\mathcal{D}$  のフーリエ変換は

$$\hat{\mathcal{D}} = \pi \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\kappa}} = \pi \frac{\hat{\gamma}_1 + i\hat{\gamma}_2}{\hat{\kappa}} \quad (3.25)$$

$$= \pi \frac{l_1^2 - l_2^2 + 2il_1 l_2}{|\vec{l}|^2} \quad (3.26)$$

と求まる。 $\hat{\mathcal{D}} \hat{\mathcal{D}}^* = \pi^2$  なので、(3.24) を  $\hat{\kappa}$  について解くと、

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{\pi} \hat{\mathcal{D}}^* \hat{\gamma} \quad (3.27)$$

となる。これを再びフーリエ積分すると、

$$\kappa(\vec{\theta}) - \kappa_0 = \frac{1}{\pi} \int d^2\theta' \mathcal{D}^*(\vec{\theta} - \vec{\theta}') \gamma(\vec{\theta}') \quad (3.28)$$

となり、 $\gamma$  マップから  $\kappa$  マップが求まることになる。ここで、定数  $\kappa_0$  が現れるのは、一様な質量分布では  $\gamma$  は生じないために  $\gamma$  のマップからは決まらないからである。

### 3.4 像の形

前の節では、レンズ天体があることにより円形の光源が楕円形にゆがめられるということを示した。光源が円形だということがあらかじめわかっているならば、像を観測したときに光源がどのくらいゆがめられたのかは一目瞭然となる。しかし、実際の観測では、光源となる銀河はもともとそれ自体固有の形を持っていて、しかも銀河固有の形の情報は得ることができない。つまり、天球上で銀河団の近傍に形の歪んだ1つの銀河を観測したとしても、それだけではその銀河の形の歪みが、銀河団による重力レンズ効果なのか、銀河固有のものなのか区別できず、レンズ天体の重力場を推測することができない。

ところが、銀河団の周囲のある領域で、重力レンズ効果を受けたと考えられる銀河をいくつか観測し、それらの形の歪みを平均することを考える。すると、各銀河固有の形はランダムだと仮定でき、歪みを平均した結果、その位置における重力レンズの効果による歪みだけをとりだすことができる。

この節では、観測によって銀河の形はどのように決めることができるのか、そこからどのように重レンズの効果を取りだすのかを説明する。

まず、CCD などの装置によって観測される銀河の形や大きさを定義する方法を考える。ある銀河の輝度分布を  $I(\vec{\theta})$  と表す。銀河の形、大きさを決めるには銀河の中心と呼べる位置を定義しなければいけないが、これは次のような式で表される量とする。

$$\vec{\bar{\theta}} \equiv \frac{\int d^2\theta q_I[I(\vec{\theta})]\vec{\theta}}{\int d^2\theta q_I[I(\vec{\theta})]} \quad (3.29)$$

$q_I(I)$  は適当な重みを表す関数 (weight function) である。もし、 $q(I)$  をステップ関数  $q_I(I) = H(I - I_{\text{th}})$  とすると、 $\vec{\bar{\theta}}$  は  $I = I_{\text{th}}$  で表される限界等級で囲まれた領域の中心となる。また、 $q_I(I) = I$  とすれば、 $\vec{\bar{\theta}}$  は輝度分布の中心となる。さらに、 $q_I(I) = I(I - I_{\text{th}})$  とすれば、 $\vec{\bar{\theta}}$  は限界等級  $I = I_{\text{th}}$  で囲まれた領域の中の、輝度分布を表す。

$q_I(I)$  を適当に決めることで  $\vec{\bar{\theta}}$  が求まると、2次の輝度モーメント  $Q_{ij}$  という量を定義することができる。

$$Q_{ij} = \frac{\int d^2\theta q_I[I(\vec{\theta})](\theta_i - \bar{\theta}_i)(\theta_j - \bar{\theta}_j)}{\int d^2\theta q_I[I(\vec{\theta})]}, \quad i, j \in 1, 2 \quad (3.30)$$

さらに、 $Q_{ij}$  を用いると、銀河の大きさと形の指標となる量を定義することができる。その1つの例として、大きさの指標  $\omega$  を

$$\omega = (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2)^{1/2} \quad (3.31)$$

とする。このように表すと、 $q(I)$  をステップ関数としたときに、 $\omega$  は限界等級で囲まれた領域を見込む角度スケールに比例するので、大きさを表す指標であることが理解できる。形の指標としては、 $\chi$  (complex ellipticity) を使うことができる。

$$\chi \equiv \frac{Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}}{Q_{11} + Q_{22}} \quad (3.32)$$

例えば、像が楕円形をしていて、その軸比が  $r \leq 1$  であったとすると、 $\chi$  は楕円の長軸と座標系の  $x$  軸のなす角を  $\vartheta$  として

$$\chi = \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \exp(2i\vartheta) \quad (3.33)$$

となる。これは、 $\vartheta = 0$  のとき  $\chi = (1 - r^2)/(1 + r^2)$  であり、像を  $\pi$  だけ回転させても値は変わらないことから、形の指標とも言える。

光源についても像と同様にして、光源の中心とみなす位置  $\vec{\beta}$  や 2 階の輝度モーメント  $Q_{ij}^{(s)}$  を定義することができる。

$$\vec{\beta} \equiv \frac{\int d^2\beta q_I[I^{(s)}(\vec{\beta})]\vec{\beta}}{\int d^2\beta q_I[I^{(s)}(\vec{\beta})]} \quad (3.34)$$

$$Q_{ij}^{(s)} = \frac{\int d^2\beta q_I[I^{(s)}(\vec{\beta})](\beta_i - \bar{\beta}_i)(\beta_j - \bar{\beta}_j)}{\int d^2\beta q_I[I^{(s)}(\vec{\beta})]}, \quad i, j \in 1, 2 \quad (3.35)$$

$Q_{ij}^{(s)}$  は、表面輝度分布の保存 (3.12) と線形化されたレンズ方程式 (3.16) を用いて、像の輝度モーメント  $Q_{ij}$  と関係づけることができる。

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{(s)} &= \frac{\int d^2\beta q_I[I(\vec{\theta})]A_{ik}(\theta_k - \bar{\theta}_k)A_{jl}(\theta_l - \bar{\theta}_l)}{\int d^2\beta q_I[I(\vec{\theta})]} \\ &= A_{ik}A_{jl}Q_{kl} \\ &= A_{ik}Q_{kl}A^T_{lj} \\ \therefore Q^{(s)} &= AQA^T = AQA \end{aligned} \quad (3.36)$$

ここで、 $A \equiv A(\vec{\theta})$  は  $\vec{\theta}$  における、レンズ方程式のヤコビアン行列。2 階の輝度モーメント  $Q^{(s)}$  を定義すると、光源の形や大きさの指標となる量を作ることができる。像と同様にして  $\chi^{(s)}$  を考えると、

$$\chi^{(s)} \equiv \frac{Q_{11}^{(s)} - Q_{22}^{(s)} + 2iQ_{12}^{(s)}}{Q_{11}^{(s)} + Q_{22}^{(s)}} \quad (3.37)$$

$Q^{(s)}$  と  $Q$  の変換式 (3.36) から、 $\chi^{(s)}$  と  $\chi$  は次のように関係づけることができる。

$$\chi^{(s)} = \frac{\chi - 2g + g^2\chi^*}{1 + |g|^2 - 2\Re(g\chi^*)} \quad (3.38)$$



ここで、 $g$  は reduced shear と呼ばれる量で、

$$g(\vec{\theta}) \equiv \frac{\gamma(\vec{\theta})}{1 - \kappa(\vec{\theta})} \quad (3.39)$$

と定義される。同じようにして、 $\omega^{(s)} = (Q_{11}^{(s)} Q_{22}^{(s)} - Q_{12}^{(s)})^{1/2}$  を考えると、 $\omega^{(s)}$  と  $\omega$  は

$$\omega = \mu(\vec{\theta}) \omega^{(s)} \quad (3.40)$$

で変換することができる。

$\chi$  の変換式 (3.38) に注目すると、 $\chi$  と  $\chi^{(s)}$  の変換は  $\gamma$  や  $\kappa$  単独ではなく、 $g$  (reduced shear) に依存していることがわかる。これは、観測によって直接、 $\gamma$  や  $\kappa$  の情報は得られず、 $g$  についての情報のみが得られることを意味している。

しかし、 $\kappa \ll 1$ 、 $|\gamma| \ll 1$  であるような弱い重力レンズの場合、2 次以上の微小量を見捨てる、 $g$  は  $g \approx \gamma$  と近似することができる。また、(3.38) は近似的に

$$\chi^{(s)} \approx \chi - 2g \quad (3.41)$$

となるので、 $\chi$  と  $\chi^{(s)}$  の関係は  $\gamma$  を用いて近似することができる。

$$\chi^{(s)} \approx \chi - 2\gamma \quad (3.42)$$

この近似式によって 1 つの銀河に対して、観測される  $\chi$  と光源の  $\chi^{(s)}$  が関係づけられるが、 $\chi^{(s)}$  は観測から知ることができないので、このままではレンズの重力場についての情報  $\gamma$  もわからない。ところが、光源となる銀河がいくつか存在すると状況は異なる。ある  $\vec{\theta}$  という位置の近傍について考える。この近傍の領域では  $\gamma$  や  $\kappa$  は大きく変化しないとする。また、各銀河はランダムな方向を向いていると仮定する。このとき、 $\chi^{(s)}$  の平均を計算すると、

$$\langle \chi^{(s)} \rangle = 0 \quad (3.43)$$

となる。したがって、(3.42) と (3.43) から、 $\gamma$  を観測量である  $\chi$  を用いて表すことができる。

$$\gamma(\vec{\theta}) \approx \langle \chi \rangle \quad (3.44)$$

## 第 4 章

# 暗黒物質ハローの球対称崩壊モデル

現在、宇宙の構造形成のモデルによると、重力レンズ効果でレンズ天体となるような銀河団は、暗黒物質の密度がまわりよりも高いところにできると考えられている。初期宇宙でわずかに暗黒物質の密度が高い領域では、時間とともに重力不安定性によって密度ゆらぎが大きくなり、ポテンシャルの井戸は次第に深くなる。すると、そのポテンシャルの井戸にバリオンが落ちていき、銀河や銀河団ができることになる。

この章では、暗黒物質の密度ゆらぎがどのように成長していくのかを、球対称崩壊モデルで解析された結果 (Structure formation in the universe) [3] をまとめる。

暗黒物質の密度ゆらぎ  $\delta(\vec{x}, t)$  を

$$\delta(\vec{x}, t) \equiv \frac{\rho(\vec{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)} \quad (4.1)$$

と定義する。ここで、 $\bar{\rho}(t)$  は時刻  $t$  における宇宙の平均密度、 $\rho(\vec{x}, t)$  は位置  $\vec{x}$  の時刻  $t$  における暗黒物質の密度を表す。宇宙初期の密度ゆらぎは小さく、 $\delta \ll 1$  であるような場合、 $\delta$  の成長はそのフーリエ変換  $\delta_k(t)$  によって解析することができる。すると、 $\delta_k(t)$  の異なるモードは独立に成長するので都合がよい。しかし、密度ゆらぎが成長して、 $\delta \sim 1$  となると、もはや  $\delta_k(t)$  を使う線形摂動論は適用できなくなる。こうなると、密度ゆらぎ  $\delta(\vec{x}, t)$  そのものの成長を考えなくてはいけなくなる。

ここでは、解析的に扱えるような球対称モデルを仮定し、密度の初期分布は、

$$\rho(r, t_i) = \rho_b(t_i) + \delta\rho(r, t_i) = \rho_b(t_i)[1 + \delta_i(r)] \quad (4.2)$$

とする。今考えている密度がまわりよりも高い領域の半径  $R$  はハッブルホライズン  $d_H$  よりも十分小さく ( $R \ll d_H$ )、摂動の波長も  $\lambda \ll d_H$  である。このような条件のもとでは、暗黒物質ハローの運動をニュートン近似の力学で考えることができる。このときの力

学は、次のような重力ポテンシャルで決まっている。

$$\begin{aligned}
 \phi_{\text{total}} &= \phi_b(r, t) + \delta\phi(r, t) \\
 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \delta\phi(r, t) \\
 &= \frac{2\pi}{3}G\rho_b r^2 + \delta\phi(r, t)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで、 $\phi_b$  はフリードマンメトリックにおける等価 ニュートンポテンシャル、 $\delta\phi$  は密度ゆらぎ  $\delta\rho$  によって生じる重力ポテンシャルを表す。また、 $r$  は、球対称ハローの動径方向を表す座標でスケールファクター  $a(t)$  と共動座標系  $\vec{x}$  の積  $r = a(t)|\vec{x}|$  となる。

まず、高密度領域の中心から距離  $r$  の位置にある、薄いシェルの運動を考える。このシェルに働く重力は半径  $r$  の球内にある質量の寄与だけなので、その運動は次のような運動方程式に従う。

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= -\nabla\phi_{\text{total}} \\
 &= -\frac{4\pi G}{3}\rho_b\vec{r} - \nabla(\delta\phi) \\
 &= -\frac{GM_b}{r^3}\vec{r} - \frac{G\delta M(r, t)}{r^3}\vec{r}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$M_b = \frac{4\pi}{3}\rho_b(t)r^3 = \frac{4\pi}{3}\rho_b a^3(t)x^3 = \text{constant} \tag{4.5}$$

$$\delta M_b = 4\pi \int_0^r \delta\rho(q, t)q^2 dq = 4\pi\rho_b(t) \int_0^r q^2 \delta(q, t) \tag{4.6}$$

問題を簡単にするために、考えている領域が膨張、収縮しても、それぞれのシェルは交わることはないと仮定する。このような仮定をおくと、各シェル内の質量は不変になるので、 $\delta M(r, t) = \delta M(r, t_i) = \text{一定}$  が成り立つ。すると、(4.5) や (4.6) は

$$\begin{aligned}
 \delta M(r_i) &= \rho_b \int_0^{r_i} \delta_i(r) 4\pi r^2 dr \\
 \bar{\delta}_i &= \left(\frac{3}{4\pi r_i^3}\right) \frac{\delta M}{\rho_b} \\
 M &= M_b + \delta M = \rho_b \left(\frac{4\pi}{3} r_i^3\right) (1 + \bar{\delta}_i)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

とまとめることができる。よって、運動方程式 (4.4) は

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \tag{4.8}$$

となる。 $r_i$  は高密度領域の  $t_i$  での半径、 $\delta_i$  は  $t_i$  における  $\delta$  の平均値を表す。(4.8) を 1 階積分すると、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} = E \tag{4.9}$$

となる。 $E$  は積分定数で、 $E$  の正負によって高密度領域が膨張するのか、収縮するのかが決まる。 $E > 0$  の場合、 $\dot{r}^2$  は常に正なのでどんな高密度領域であっても膨張しづけることになる。一方、 $E < 0$  の場合、 $r$  が大きくなると  $\dot{r}^2$  が 0 となる  $r$  が存在するので、ある大きさ以上の高密度領域は収縮することがわかる。

$E$  の正負を決める条件を調べるために、 $t = t_i$  での運動方程式 (4.9) を考える。 $t = t_i$  では  $\delta_i$  は十分小さいことから、このときの高密度領域はバックグラウンドとともに膨張していて、固有運動は無視できる。すると、運動エネルギーは

$$\begin{aligned}\dot{r}_i &= \dot{a}(t_i)x = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_i} a(t_i)x = H(t_i)r_i \equiv H_i r_i \\ K_i &\equiv \frac{1}{2}(\dot{r}^2)_{t=t_i} = \frac{1}{2}H_i^2 r_i^2\end{aligned}\quad (4.10)$$

となる。また、重力ポテンシャル  $U = -|U|$  は

$$\begin{aligned}|U| &= \left(\frac{GM}{r}\right)_{t=t_i} = G\frac{4\pi}{3}\rho_b(t_i)r_i^2(1 + \bar{\delta}_i) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{\text{cr}}\right)_{t=t_i}\left(\frac{\rho_b}{\rho_{\text{cr}}}\right)_{t=t_i}r_i^2(1 + \bar{\delta}_i) \\ &\equiv \frac{1}{2}H_i^2 r_i^2\Omega_i(1 + \bar{\delta}_i) = K_i\Omega_i(1 + \bar{\delta}_i)\end{aligned}\quad (4.11)$$

と表される。 $\Omega_i$  は時刻  $t_i$  での臨界密度とバックグラウンドの物質密度の比。これらから、高密度領域の全エネルギーは

$$\begin{aligned}E &= K_i + U = K_i - K_i\Omega_i(1 + \bar{\delta}_i) \\ &= K_i\Omega_i[\Omega_i^{-1} - (1 + \bar{\delta}_i)]\end{aligned}\quad (4.12)$$

となるので、シェルが収縮するための条件  $E < 0$  は

$$\Omega_i^{-1} - (1 + \bar{\delta}_i) < 0 \quad \therefore \bar{\delta}_i > \Omega_i^{-1} - 1 \quad (4.13)$$

と同値であることがわかる。よって、閉じた宇宙 ( $\Omega_i > 1$ ) や平坦な宇宙 ( $\Omega_i = 1$ ) では  $\bar{\delta}_i > 0$  である高密度領域は、必ず収縮することになる。 $\Omega_i < 1$  である開いた宇宙では、 $\bar{\delta}_i(r_{\text{cr}}) = \Omega_i^{-1} - 1$  となるような、臨界初期半径の内側のシェルだけが収縮することができる。

ここからは、 $E < 0$  の場合で、宇宙膨張とともにある最大半径  $r_m$  まで膨張し、その後収縮するようなシェルを考えることにする。初めに、シェルが最大に膨張したとき  $\dot{r} = 0$

が成り立っているので、この条件から  $r_m$  を求めることができる。

$$\begin{aligned}
 E &= -\frac{GM}{r_m} = -\frac{G}{r_m} \frac{4\pi}{3} \rho_b r_i^3 (1 + \bar{\delta}_i) \\
 &= -\frac{r_i}{r_m} \frac{1}{2} H^2 r_i^2 \Omega_i (1 + \bar{\delta}_i) \\
 &= -\frac{r_i}{r_m} K_i \Omega_i (1 + \bar{\delta}_i)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

左辺に (4.12) を代入すると、

$$\begin{aligned}
 K_i \Omega_i [\Omega_i^{-1} - (1 + \bar{\delta}_i)] &= -\frac{r_i}{r_m} K_i \Omega_i (1 + \bar{\delta}_i) \\
 \therefore \frac{r_m}{r_i} &= \frac{1 + \bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

この式からは、 $\bar{\delta}_i \gtrsim \Omega_i^{-1} - 1$  で、密度ゆらぎが  $\Omega_i^{-1} - 1$  に比べて小さいときは  $r_m \ll r_i$  となり収縮を始めるまでにより長い時間がかかると考えられる。

詳しいシェルの時間発展を得るためには、運動方程式を解かなければならない。 $E < 0$  のとき、(4.9) は、

$$r = A(1 - \cos \theta), \quad t + T = B(\theta - \sin \theta), \quad A^3 = GMB^2 \tag{4.16}$$

という解を持つ。

$\therefore E < 0$  のとき、(4.9) を変形すると

$$\begin{aligned}
 \frac{2Er}{GM} + 2 - \frac{r\dot{r}}{GM} &= 0 \\
 \left(\frac{2Er}{GM}\right)^2 + 2\frac{2Er}{GM} - 2E\left(\frac{r\dot{r}}{GM}\right)^2 &= 0 \\
 \left(\frac{2Er}{GM} + 1\right)^2 - 2E\left(\frac{r\dot{r}}{GM}\right)^2 &= 1 \\
 \left[\frac{2|E|}{GM}\left(r - \frac{GM}{2|E|}\right)\right]^2 + 2|E|\left(\frac{r\dot{r}}{GM}\right)^2 &= 1
 \end{aligned}$$

と書き直すことができる。よって、左辺1項目と2項目は  $\theta$  をパラメーターとして

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{2|E|}{GM}\left(r - \frac{GM}{2|E|}\right)\right] &= \pm \cos(\theta + \alpha) \\
 \sqrt{2|E|}\left(\frac{r\dot{r}}{GM}\right) &= \pm \sin(\theta + \alpha)
 \end{aligned}$$

と書ける。

1つ目の式から  $r$  を  $\theta$  を用いて表すことができる。

$$r = \frac{GM}{2|E|} [1 \pm \cos(\theta + \alpha)] \quad (4.17)$$

$t$  は、 $dt/d\theta = \dot{r}^{-1} dr/d\theta$  が成り立つことから求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\theta} &= \frac{1}{\dot{r}} \frac{dr}{d\theta} \\ &= \frac{1}{\dot{r}} \frac{GM}{2|E|} [\mp \sin(\theta + \alpha)] \\ &= \mp \frac{1}{\dot{r}} \frac{GM}{2|E|} \sqrt{2|E|} \frac{r\dot{r}}{GM} \\ &= \mp \frac{1}{(2|E|)^{1/2}} \left( \frac{GM}{2|E|} \pm \cos(\theta + \alpha) + \frac{GM}{2|E|} \right) \\ &= \mp \frac{GM}{(2|E|)^{3/2}} [\pm \cos(\theta + \alpha) + 1] \\ t &= \mp \frac{GM}{(2|E|)^{3/2}} [\pm \sin(\theta + \alpha) + \beta\theta + \gamma] \\ t + T &= \frac{GM}{(2|E|)^{3/2}} [\mp \beta\theta - \sin(\theta + \alpha)] \end{aligned} \quad (4.18)$$

$\theta = 0$  で  $t = 0$ ,  $r = 0$  として  $\alpha, \beta$  や符号を決めると、

$$r = A(1 - \cos \theta), \quad t + T = B(\theta - \sin \theta), \quad A^3 = GMB^2$$

となることがわかる。

定数  $A$  は、 $\theta = \pi$  で  $r = r_m$  となることから  $r_m = 2A$  なので、(4.15) から  $r_m$  を消去すると、 $r_i$  を用いて

$$A = \frac{r_i}{2} \frac{1 + \bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)} \quad (4.19)$$

となる。 $B$  は、 $A^3 = GMB^2$  という関係から、

$$B = \sqrt{\frac{A^3}{GM}} = \sqrt{\frac{A^3}{\frac{1}{2}H_i^2\Omega_i r_i^3(1 + \bar{\delta}_i)}} = \frac{1 + \bar{\delta}_i}{2H_i\Omega_i^{1/2}[\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)]^{3/2}} \quad (4.20)$$

と求まる。 $T$  は  $t = t_i$  で  $r = r_i$  から決まる。例として、バックグラウンドの宇宙モデルがアインシュタイン-ド・ジッターモデル ( $\Omega_i = 1$ ) である場合で考える。このとき  $A$  と  $B$  は

$$A = \frac{r_i}{2} \frac{1 + \bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i}, \quad B = \frac{1 + \bar{\delta}_i}{2H_i\bar{\delta}_i^{3/2}} \quad (4.21)$$

となるので、(4.16) は  $t = t_i$  で

$$r_i = \frac{r_i}{2} \frac{1 + \bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i} (1 - \cos \theta_i) \quad (4.22)$$

$$t_i + T = \frac{1 + \bar{\delta}_i}{2H_i \bar{\delta}_i^{3/2}} (\theta_i - \sin \theta_i) \quad (4.23)$$

ここで、(4.22) を  $\cos \theta_i$  について解くと、

$$\cos \theta_i = \frac{1 - \bar{\delta}_i}{1 + \bar{\delta}_i} \simeq 1 - 2\bar{\delta}_i \quad (4.24)$$

となる。最右辺は  $\bar{\delta}_i$  が十分小さいことから成り立つ。さらに、 $\cos \theta_i$  を展開すると、 $\theta_i^2 \simeq 4\bar{\delta}_i$  となる。この結果を (4.23) に代入すると、

$$H_i(t_i + T) \simeq \frac{1}{2} \frac{1 + \bar{\delta}_i}{\theta_i^3/8} [\theta_i - (\theta_i - \frac{1}{6}\theta_i^3)] = \frac{2}{3}(1 + \bar{\delta}_i) \quad (4.25)$$

アインシュタイン-ド・ジッターモデルでは  $H_i t_i = 2/3$  が成り立つので、 $H_i T = \frac{2}{3}\bar{\delta}_i$ 。したがって、これらの辺々を割ると  $T/t_i = \bar{\delta}_i \ll 1$  となるので、 $T$  は無視することができる。この結果は、 $\bar{\delta} \ll 1$  である限り、 $\Omega_i \neq 1$  の宇宙に対しても成り立つ。

ここまでで、運動方程式の係数が決まったので、(4.16) からシェルの時間発展を考察することができる。例として、それぞれのシェルの平均密度の時間発展を考える。高密度領域の質量  $M$  は不変なので、平均密度の時間変化は

$$\bar{\rho}(t) = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} r^3} = \frac{3M}{4\pi A^3 (1 - \cos \theta)^3} \quad (4.26)$$

と表される。密度プロファイルが一様な 'top-hat profile' では、 $\bar{\rho}$  が実際の密度プロファイルを表していることになる。また、密度ゆらぎ  $\bar{\delta}(r, t)$  の時間発展を知るためには、バックグラウンドの密度  $\rho_b(t)$  の時間発展を求めておく必要がある。もっとも簡単な場合として平坦な宇宙を考えると、スケールファクターとバックグラウンドの密度は、

$$a \propto t^{2/3}, \quad \rho_b(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (4.27)$$

で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} &= H \propto a^{-3/2} \text{ より } \frac{da}{dt} \propto a^{-1/2} \\ \int_0^a a'^{1/2} da' &\propto \int_0^t dt', \quad \frac{2}{3} a^{3/2} \propto t, \quad \therefore a \propto t^{2/3} \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho_b \text{ より } \left(\frac{2}{3} \frac{a/t}{a}\right) = \frac{8\pi G}{3} \rho_b, \quad \therefore \rho_b = \frac{1}{6\pi G t^2} \end{aligned}$$

よって、 $\bar{\rho}$  と  $\rho_b$  の比から  $\bar{\delta}$  は、

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\rho}}{\rho_b} &= 1 + \bar{\delta}(r, t) = \frac{3M}{4\pi A^3} \frac{6\pi G B^2 (\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} \\ \bar{\delta}(r, t) &= \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} - 1\end{aligned}\quad (4.28)$$

となることがわかる。この式は、 $t$  が十分小さい宇宙初期では、密度ゆらぎが線形成長することを再現する。

$t$  が十分小さいとき、つまり、 $\theta \ll 1$  のとき、 $\sin \theta$  などを展開すると  $\bar{\delta}$  は、

$$\begin{aligned}\bar{\delta} &\simeq \frac{9}{2} \frac{(\frac{1}{6}\theta^3 - \frac{1}{120}\theta^5)^2}{(\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{24}\theta^4)^3} - 1 = \frac{(1 - \frac{1}{20}\theta^2)^2}{1 - \frac{1}{12}\theta^2} - 1 \\ &\simeq (1 - \frac{1}{10}\theta^2)(1 + \frac{1}{4}\theta^2) - 1 \\ &\simeq \frac{3}{20}\theta^2\end{aligned}\quad (4.29)$$

となる。同様にすると、 $t$  は、

$$t \simeq B[\theta - (\theta - \frac{1}{6}\theta^3)] = \frac{B}{6}\theta^3 \quad (4.30)$$

となる。2つの式から  $\theta$  を消去すると、

$$\bar{\delta} \simeq \frac{3}{20} \left( \frac{6t}{B} \right)^{2/3} \quad (4.31)$$

$\Omega_i = 1$  である平坦な宇宙を考えると、 $H_i t_i = \frac{2}{3}$  が成り立っているので、 $B$  は、

$$B = \frac{3}{4} \frac{t_i^{3/2}}{\bar{\delta}_i} (1 + \bar{\delta}_i) \quad (4.32)$$

と表される。このとき  $\bar{\delta}$  は、

$$\bar{\delta} \simeq \frac{3}{20} \left( 8 \frac{\bar{\delta}_i^{3/2}}{1 + \bar{\delta}_i} \frac{t}{t_i} \right)^{2/3} \sim \frac{3}{5} \bar{\delta}_i \left( \frac{t}{t_i} \right)^{2/3} \propto a(t) \quad (4.33)$$

よって、この式は、初期宇宙では密度ゆらぎが線形成長することを示している。

$\Omega_i = 1$  のアインシュタイン-ド・ジッター 宇宙に注目し、 $\bar{\delta}_i \ll 1$  とすると、(4.21) は次のように近似することができる。

$$A \simeq \frac{r_i}{2\bar{\delta}_i}, \quad B \simeq \frac{3}{4} \frac{t_i}{\bar{\delta}_i^{3/2}} \quad (4.34)$$



ここで、 $x$  と  $\bar{\delta}_0$  という量を導入する。 $x$  は  $r_i$  に対応する共動距離。

$$x = r_i \frac{a(t_0)}{a(t_i)} \quad (4.35)$$

$\bar{\delta}_0$  は、赤方偏移  $z_i$  での密度ゆらぎ  $\delta_i$  が現在まで線形成長したとしたときの、現在の密度ゆらぎ。

$$\bar{\delta}_0 = \frac{3}{5} \delta_i \frac{a(t_0)}{a(t_i)} = \frac{3}{5} \bar{\delta}_i (1 + z_i) \quad (4.36)$$

この  $x$  と  $\bar{\delta}_0$  を用いて  $A$  と  $B$  を表すと、

$$A = \frac{3}{10} \frac{x}{\bar{\delta}_0}, \quad B = \frac{3}{4} t_i \left( \frac{3}{5} \right)^{3/2} \bar{\delta}_0^{-3/2} \left( \frac{a(t_0)}{a(t_i)} \right)^{3/2} = \frac{3}{4} \left( \frac{3}{5} \right)^{3/2} \frac{t_0}{\bar{\delta}_0^{3/2}} \quad (4.37)$$

と書ける。すると、 $\Omega_i = 1$  の宇宙での球対称高密度領域の半径、平均密度の時間変化を表す式は、次のようにまとめることができる。

$$r(t) = \frac{r_i}{2\bar{\delta}_i} (1 - \cos \theta) = \frac{3x}{10\bar{\delta}_0} (1 - \cos \theta) \quad (4.38)$$

$$t = \frac{3t_i}{4\bar{\delta}_i^{3/2}} (\theta - \sin \theta) = \frac{3}{4} \left( \frac{3}{5} \right)^{3/2} \frac{t_0}{\bar{\delta}_0^{3/2}} (\theta - \sin \theta) \quad (4.39)$$

$$\bar{\rho}(t) = \rho_b \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} \quad (4.40)$$

時刻と赤方偏移の間には、 $(t/t_i)^{2/3} = (1 + z_i)/(1 + z)$  という関係があるので、密度ゆらぎは赤方偏移の関数として表すこともできる。

$$\begin{aligned} 1 + z &= (1 + z_i) \left( \frac{t}{t_i} \right)^{-2/3} = \left( \frac{4}{3} \right)^{2/3} \frac{\bar{\delta}_i (1 + z_i)}{(\theta - \sin \theta)^{2/3}} \\ &= \frac{5}{3} \left( \frac{4}{3} \right)^{2/3} \frac{\bar{\delta}_0}{(\theta - \sin \theta)^{2/3}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\bar{\delta} = \frac{9}{2} \frac{(\theta(z) - \sin \theta(z))^2}{(1 - \cos \theta(z))^3} - 1 \quad (4.42)$$

一方、密度ゆらぎが線形成長する場合は、

$$\bar{\delta}_L = \frac{\bar{\rho}_L}{\rho_b} - 1 = \frac{3}{5} \bar{\delta}_i \frac{1 + z_i}{1 + z} = \frac{3}{5} \left( \frac{3}{4} \right)^{2/3} (\theta - \sin \theta)^{2/3} \quad (4.43)$$

と表される。 $\bar{\delta}$  と  $\bar{\delta}_L$  を比較すると、 $\bar{\delta}_L$  がどのくらいの精度で正しく密度ゆらぎの成長を表しているか見積もることができる。まず、 $z \gg 1$  の十分初期では  $\theta \ll 1$  なので

$\bar{\delta}(z) \simeq \bar{\delta}_L(z)$  が成り立つ。次に、 $\theta = \pi/2$  のとき比較すると、

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_L &= \frac{3}{5} \left( \frac{3}{4} \right)^{2/3} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)^{2/3} \simeq 0.341 \\ \bar{\delta} &= \frac{9}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)^2 - 1 \simeq 0.446 \\ \frac{\bar{\delta} - \bar{\delta}_L}{\bar{\delta}_L} &= \frac{0.466 - 0.341}{0.341} \approx 40\%\end{aligned}\tag{4.44}$$

となり、実際の密度ゆらぎは、線形成長したと考えたときよりも 40% ほど大きいことがわかる。同じように、 $\theta = 2\pi/3$  のとき比較してみる。

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_L &= \frac{3}{5} \left( \frac{3}{4} \right)^{2/3} (2\pi/3 - \sqrt{3}/2)^{2/3} \simeq 0.568 \\ \bar{\delta} &= \frac{9}{2} \frac{(2\pi/3 - \sqrt{3}/2)^2}{(3/2)^3} - 1 \simeq 1.01\end{aligned}\tag{4.45}$$

このことから、 $\bar{\delta} = 1$  となることを線形成長から非線形成長への転換点だと考えると、それは、 $\theta = 2\pi/3$ 、 $\bar{\delta}_L \simeq 0.57$  で起きることになる。この転換点を赤方偏移で表すと、(4.41) から、

$$1 + z_{nl} = \left( \frac{4}{3} \right)^{2/3} \frac{\bar{\delta}_i(1 + z_i)}{(2\pi/3 - \sqrt{3}/2)^{2/3}} \simeq 1.06\bar{\delta}_i(1 + z_i) = \frac{\bar{\delta}_0}{0.57}\tag{4.46}$$

となる。また、高密度領域の半径が最大となる  $\theta = \pi$  のときの赤方偏移  $z_m$ 、半径  $r_m$ 、密度ゆらぎ  $\bar{\delta}_m$  を調べてみると次のようになる。

$$\begin{aligned}1 + z_m &= \left( \frac{4}{3} \right)^{2/3} \frac{\bar{\delta}_i(1 + z_i)}{\pi^{2/3}} \simeq 0.56\bar{\delta}_i(1 + z_i) = \frac{\bar{\delta}_0}{1.062} \\ r_m &= \frac{3}{10} \frac{x}{\bar{\delta}_0} 2 = \frac{3}{5} \frac{x}{\bar{\delta}_0} \\ \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho} \right)_m &= 1 + \bar{\delta}_m = \frac{9}{2} \frac{\pi^2}{2^3} = \frac{9}{16} \pi^2 \simeq 5.6\end{aligned}\tag{4.47}$$

このとき  $\bar{\delta}_m \simeq 4.6$  なので、線形成長では密度ゆらぎの時間変化は正しく追えないことがわかる。

(4.38) をそのまま適用すると、半径が最大になった後の高密度領域は収縮に転じ、 $\theta = 2\pi$  で 1 点に収縮する。しかし、実際には  $\theta = 2\pi$  となる前から物質は球殻状に分布し、個々の粒子のランダム運動は小さいと言う近似は成り立たなくなっている。また、暗黒物質のような相互作用が非常に弱い成分は、次のような 'violent relaxation' という過程によってビリアル平衡が成り立つ状態になる。

高密度領域が収縮すると、自由落下時間  $t_{\text{dyn}} \simeq 1/\sqrt{G\rho}$  という時間スケールで、重力ポテンシャルが大きく変化する。ポテンシャルが時間変化するために、個々の粒子はエネルギーが保存されるような軌道を保つことができなくなる。その結果、粒子に対してリラクゼーションメカニズムが働き、系としてビリアル平衡に達する。

このようなプロセスによって生じたビリアル平衡を満たす系は、ビリアル半径  $r_{\text{vir}}$ 、ビリアル速度  $v$ 、平均密度  $\rho_{\text{coll}}$  によって特徴づけられる。また、ビリアル平衡の系のポテンシャルエネルギー  $U$  と運動エネルギー  $K$  の間には、 $|U| = 2K$  という関係があるので、全エネルギーは  $E = U + K = -K$  となる。一方、 $t = t_m$  のとき運動エネルギーは  $K = 0$  なので、全エネルギーは  $E = -U \simeq -3GM^2/5r_m$  と表される。 $E$  は保存量であることから、 $r_{\text{vir}}$  や  $v$  を見積もることができる。

$$\begin{aligned} K &\equiv \frac{1}{2}Mv^2 = -E = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{r_m} \\ |U| &= \frac{3}{5}\frac{GM^2}{r_{\text{vir}}} = 2K = Mv^2 \\ \therefore v &= \sqrt{\frac{6}{5}\frac{GM}{r_m}}, r_{\text{vir}} = \frac{1}{2}r_m \end{aligned} \quad (4.48)$$

高密度領域がビリアル平衡に達するまでの時間  $t_{\text{coll}}$  は、(4.39) で  $\theta = 2\pi$  に対応する。また、 $t = t_{\text{coll}}$  のときの赤方偏移  $z_{\text{coll}}$  は、(4.41) から、

$$\begin{aligned} 1 + z_{\text{coll}} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{\bar{\delta}_i(1 + z_i)}{(2\pi)^{2/3}} \simeq 0.36\bar{\delta}_i(1 + z_i) \simeq 0.36(1 + z_m) \\ &= \frac{\bar{\delta}_0}{1.686} \end{aligned} \quad (4.49)$$

と表される。この式は、ある高密度領域の密度ゆらぎの非線形成長を考えなくても、線形成長したと仮定し、その現在での値  $\bar{\delta}_0$  を求めれば、その高密度領域がビリアル平衡に達する赤方偏移  $z_{\text{coll}}$  がわかるということを意味している。 $z_{\text{coll}}$  のときの平均密度  $\rho_{\text{coll}}$  は、 $r_{\text{vir}} = r_m/2$  という関係から求めることができる。密度は半径の3乗に反比例するので、 $\rho_{\text{coll}}$  は高密度領域の半径が最大になるときの密度  $\rho_m$  を用いると、

$$\rho_{\text{coll}} = 8\rho_m \quad (4.50)$$

となる。さらに、 $t = t_m$  のときのバックグラウンドの密度と系の密度の比は、(4.47) から  $\rho_m \simeq 5.6\rho(t_m)$  と求まっている。 $\rho_b(t_m)$  は  $t = t_{\text{coll}}$  のときのバックグラウンドの密度  $\rho_b(t_{\text{coll}})$  を用いて、 $\rho_b(t_m) = (1 + z_m)^3(1 + z_{\text{coll}})^{-3}\rho_b(t_{\text{coll}})$  と表されるので、これらの関

係から  $\rho_{\text{coll}}$  は、

$$\begin{aligned}\rho_{\text{coll}} &= 8\rho_m \simeq 44.8\rho_b(t_m) = 44.8 \frac{(1+z_m)^3}{(1+z_{\text{coll}})^3} \rho_b(t_{\text{coll}}) \\ &\simeq \frac{44.8}{0.63^3} \rho_b(t_{\text{coll}}) \simeq 179\rho_0(1+z_{\text{coll}})^3\end{aligned}\quad (4.51)$$

と表される。この式から、系の平均密度がバックグラウンドの密度のおよそ 180 倍ならば、その系はビリアル平衡の状態になっているといえる。系がビリアル平衡になると、その密度と大きさは変化しなくなる。しかし、バックグラウンドの密度は  $\rho_b \propto a^{-3}$  で減少していくので、 $t > t_{\text{coll}}$  では  $\bar{\delta}$  は  $a^3$  に比例して増加していく。

ここまでは 1 つの暗黒物質ハローの形成について見てきたが、ハローは様々なスケールで存在している。したがって、様々な質量スケールのハローの形成を考えていくために、密度ゆらぎの統計的な性質を調べる。Appendix B の (B.4) を 3 次元密度ゆらぎの場に適用すると、 $\delta_i(\vec{x})$  のフーリエ変換  $\hat{\delta}_i(\vec{k})$  に対して、パワースペクトルを次のように定義することができる。

$$\langle \hat{\delta}_i(\vec{k}) \hat{\delta}_i^*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 P(k) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.52)$$

ここで、

$$W(R) = \begin{cases} 1 & r \leq R \text{ のとき} \\ 0 & r > R \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.53)$$

という重み関数を定義して、ある半径  $R$  の球に含まれる密度ゆらぎを

$$\delta_R(\vec{r}) = \int d^3r' \delta_i(\vec{r} + \vec{r}') W(\vec{r}') \quad (4.54)$$

と表すと、これらの密度ゆらぎの分散はパワースペクトル  $P(k)$  の積分として次のように与えられる。

$$\sigma^2(M) = \sigma^2(R) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} k^2 P(k) \tilde{W}^2(Rk) \quad (4.55)$$

$$\tilde{W}(x) = 3 \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^3} \quad (4.56)$$

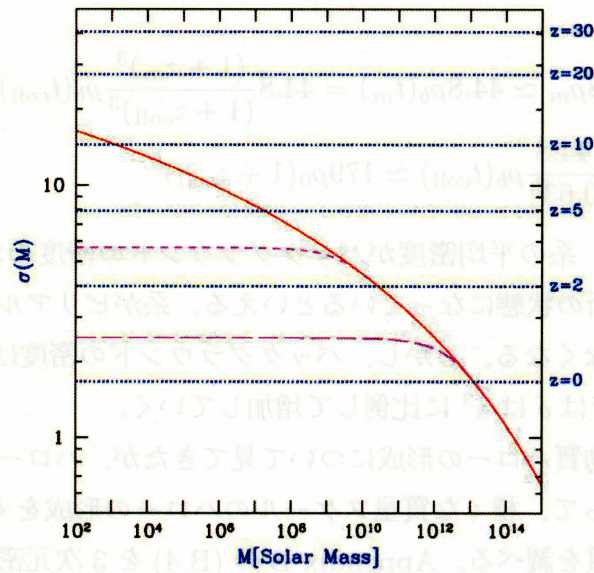


図 4.1 Barkana&Loeb(2001) の図 5。冷たい暗黒物質モデルにおけるハローの質量  $M$  とそれに対応する密度ゆらぎの分散  $\sigma(M)$  の関係 (実線)。水平方向の点線は、 $z = 0, 2, 5, 10, 20, 30$  でビリアル平衡に達する初期密度ゆらぎを、現在まで線形成長させたときの値。 $z = 0$  と  $2, 2$  と  $5$  の間にある点線は、それぞれ  $M = 1.7 \times 10^{11} M_{\odot}, 1.7 \times 10^8 M_{\odot}$  に対応するスケール以下で、パワースペクトル  $P(k)$  を 0 としたときの  $\sigma(M)$  を表す。

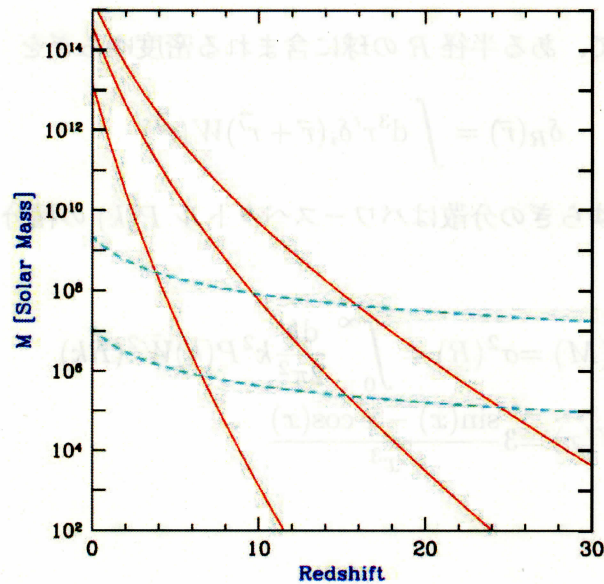


図 4.2 3つの実線は下からそれぞれ、初期密度ゆらぎが  $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$  のハローに対応している。上の点線は、宇宙初期に存在している原子によって冷やされたハローの、最低ビリアル温度に対応する質量、下の点線は、水素分子も考慮したときのもの。

図 (4.1) と図 (4.2) は Barkana&Loeb(2001)[25] から引用した図である。(4.1) の実線は、冷たい暗黒物質モデル ( $\Omega_m = 0.3, \Omega_\lambda = 0.7, h = 0.7$ ) における  $\sigma(M)$  を示している。水平方向の点線は、 $z = 0, 2, 5, 10, 20, 30$  にビリアル平衡に達するハローの密度ゆらぎを、現在まで線形成長させたとしたときの値、 $\bar{\delta}_0$  を表している。この図からは、例えば、 $z = 5$  の  $\bar{\delta}_0$  の値と  $\sigma(M)$  が  $M = 2 \times 10^7 M_\odot$  で交差しているので、質量  $M = 2 \times 10^7 M_\odot$  のハローは  $z = 5$  には形成されることがわかる。一方、これよりも質量が大きいハローが  $z = 5$  で形成されるためには、密度ゆらぎがより大きくなければならないことになる。

また、図 (4.1) の  $z = 0$  と  $z = 2$  と  $z = 5$  の間にある点線は、それぞれ質量が  $1.7 \times 10^{11} M_\odot$ 、 $1.7 \times 10^8 M_\odot$  より小さいスケールでパワースペクトル  $P(k)$  を 0 としたときの  $\sigma(M)$  を表している。このような  $\sigma(M)$  の分布を考えると、質量の小さなハローができにくくなるので、 $z \gg 1$  では暗黒物質のうち一部しかハローを形成していないことになる。

図 (4.2) の 3 つの実線は、下からそれぞれ密度ゆらぎが  $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$  に対応するハローを示していて、この図から、初期の密度ゆらぎによって、いつどのくらいの質量のハローに成長するのかがわかる。図の 2 つの点線は、宇宙初期に存在する原子だけによって冷やされたときの最低ビリアル温度に対応する質量 (上の点線) と、水素分子も考慮したときに冷やされた最低ビリアル温度に対応する質量 (下の点線) を表している。



## 第 5 章

# 銀河団ハローモデルと弱い重力レンズ効果

第 2 章のレンズ方程式で見たように、レンズ天体によって生じるシアアは、レンズ天体を天球面上に投影したときの 2 次元質量分布  $\kappa(\vec{\theta})$  によって決まる量である。この章では、レンズ天体として銀河団に付随するような暗黒物質ハローを考え、そのまわりでシアアマップがどのように表されるのかをまとめる。まず初めに、もっとも簡単な場合として、球対称暗黒物質ハロー (NFW モデル) によって生じるシアアについて考える [4]。この場合レンズ天体は球対称なので、ハローの中心からの距離だけの関数になると考えられる。しかし、バリオンと違い相互作用が非常に弱い暗黒物質では、一般にはハローが球対称にはならず、3 軸不等な楕円体になることが知られている [5]。また、3 軸不等な楕円体である暗黒物質ハローを天球上に投影すると、その 2 次元質量分布は必ず楕円になることが示されている [6]。そこで、より実際的な場合として、天球上で 2 次元質量分布が楕円形である暗黒物質ハロー (Jing&Suto モデル) によって生じるシアアについて考える。ここからは、どちらの場合でも、赤方偏移  $z$  にあるハローは  $z$  でビリアル平衡に達したと仮定する。

## 5.1 球対称暗黒物質ハロー

### 5.1.1 NFW プロファイル

球対称暗黒物質ハローの 2 次元質量分布を求めるためには、3 次元質量分布がわかっていなければならない。最近の N 体シミュレーションによると、暗黒物質ハローは系の大きさによらない普遍的な密度プロファイルを持っていることがわかって来た。このプロファイルは、初めて発見した Navarro, Frenk & White の頭文字を取って、NFW プロ



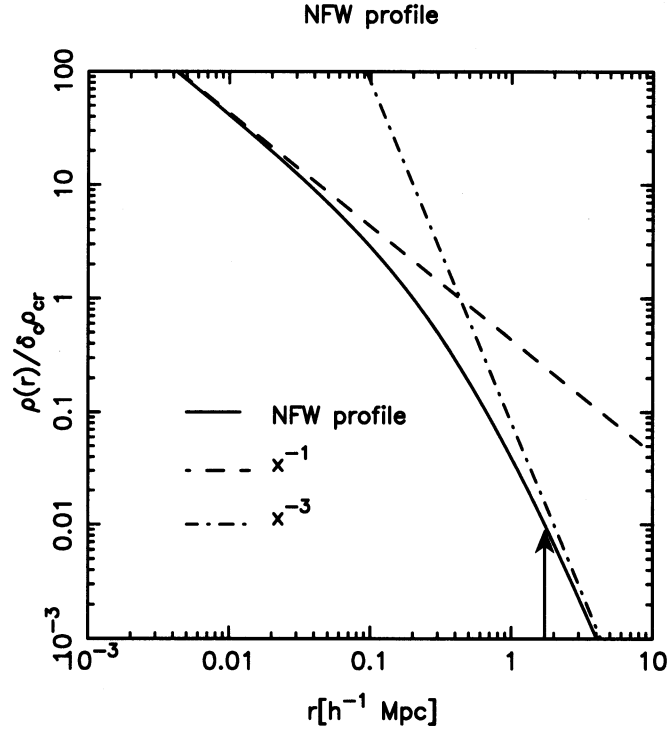


図 5.1 LCDN モデル ( $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7, h = 0.7$ ) において、 $z = 0.3$  にある  $M_{\text{vir}} = 1.0 \times 10^{15} (h^{-1} M_\odot)$ ,  $c_{\text{vir}} = 4.0$  の NFW プロファイルをもつハローの密度分布。矢印は、このハローのビリアル半径を表す。

ファイルと呼ばれている。NFW プロファイルは次のような関数で表される。

$$\rho(r) = \frac{\delta_c \rho_c}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2} \quad (5.1)$$

ここで、 $\rho_c$  は赤方偏移  $z$  における宇宙の臨界密度  $3H^2(z)/8\pi G$  を表している。 $r_s$  はスケール半径と呼ばれる量で、中心集中度  $c_{\text{vir}}$  (concentration parameter) とハローのビリアル半径  $r_{\text{vir}}$  の間に、 $r_s = r_{\text{vir}}/c_{\text{vir}}$  という関係がある。 $\delta_c$  は、次のように考えると  $c_{\text{vir}}$  を用いて表されることがわかる。初めに、ハローのビリアル質量  $M_{\text{vir}}$  を求めることを考

えると、それは  $\rho(r)$  を  $r_{\text{vir}}$  まで積分することで得られる。

$$\begin{aligned}
 M_{\text{vir}} &= \int_0^{r_{\text{vir}}} 4\pi r^2 \rho(r) dr = \delta_c \rho_c(z) 4\pi r_s^3 \int_0^{r_{\text{vir}}} \frac{r/r_s}{(1+r/r_s)^2} d(r/r_s) \\
 &= \delta_c \rho_c(z) 4\pi r_s^3 \int_0^{c_{\text{vir}}} \frac{x}{(1+x)^2} dx \\
 &= \delta_c \rho_c(z) 4\pi r_s^3 \int_0^{c_{\text{vir}}} \left[ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} \right] dx \\
 &= \delta_c \rho_c(z) 4\pi r_s^3 \left[ \ln(1+x) - \frac{1}{1+x} \right]_0^{c_{\text{vir}}} \\
 &= \delta_c \rho_c(z) 4\pi r_s^3 \left[ \ln(1+c_{\text{vir}}) + \frac{c_{\text{vir}}}{1+c_{\text{vir}}} \right] \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

また、NFW モデルでは  $M_{\text{vir}}$  を

$$M_{\text{vir}} = \frac{4\pi}{3} r_{\text{vir}}^3 \Delta_{\text{vir}}(z) \Omega_m(z) \rho_c(z) \tag{5.3}$$

と表すことができる。 $\Delta_{\text{vir}}(z)$  は、ハローがビリアル平衡に達したときに、その系の平均密度がバックグラウンドの密度に対してどれだけ密度が高いのかを表す量である。前章で見たように、アインシュタイン-ド・ジッター宇宙で球対称に収縮するハローでは、 $\Delta_{\text{vir}} \approx 180$  となる。 $\Omega_\Lambda$  を含むような宇宙では、[8] より

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\text{vir}} &= \begin{cases} 4\pi^2 \frac{(\cosh \eta_{\text{vir}} - 1)^3}{(\sinh \eta_{\text{vir}} - \eta_{\text{vir}})^2} & (\Omega_m < 1, \Omega_\Lambda = 0) \\ 18\pi^2 (1 + 0.4093 \omega_{\text{vir}}^0 \cdot 9052) & (\Omega_m < 1, \omega_\Lambda = 1.0 - \Omega_m) \end{cases} \tag{5.4} \\
 \eta_{\text{vir}} &\equiv \cosh^{-1}(2/\Omega_{\text{vir}} - 1), \quad \omega_{\text{vir}} \equiv 1/\Omega_{\text{vir}} - 1 \\
 \Omega_{\text{vir}} &= \frac{\Omega_m (1 + z_{\text{vir}})^3}{\Omega_m (1 + z_{\text{vir}})^3 + (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda)(1 + z_{\text{vir}})^2 + \Omega_\Lambda}
 \end{aligned}$$

という公式を用いることができる。(5.2) と (5.3) から  $M_{\text{vir}}$  を消去すると、

$$\begin{aligned}
 \delta_c \rho_c(z) 4\pi r_s^3 \left[ \ln(1+c_{\text{vir}}) + \frac{c_{\text{vir}}}{1+c_{\text{vir}}} \right] &= \frac{4\pi}{3} r_{\text{vir}}^3 \Delta_{\text{vir}}(z) \Omega_m(z) \rho_c(z) \\
 \therefore \delta_c &= \frac{\Delta_{\text{vir}} \Omega_m(z)}{3} \frac{c_{\text{vir}}^3}{\ln(1+c_{\text{vir}}) + \frac{c_{\text{vir}}}{1+c_{\text{vir}}}} \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

と求まる。

図 (5.1) は、LCDM モデル  $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7, h = 0.7$  において、 $M_{\text{vir}} = 1.0 \times 10^{15} (h^{-1} M_\odot)$ ,  $c_{\text{vir}} = 4.0$  の NFW プロファイルをもつハローが赤方偏移  $z = 0.3$  にあったとしたときの密度プロファイルを示している。式 (5.1) からわかるように、ハローの内側では中心からの距離に反比例し、外側では 3 乗に反比例するプロファイルを持っている。

### 5.1.2 NFW モデルの面密度とシア

このような NFW プロファイルを持つ暗黒物質ハローの 2 次元質量分布  $\Sigma_{\text{sph}}(R)$  は、3 次元密度プロファイル  $\rho(r)$  を視線方向に積分することで求められる。 $R$  は天球に投影したハローの中心からの距離で、 $R = D_d(\theta_1^2 + \theta_2^2)^{1/2}$ 。 $R$  を  $r_s$  で規格化した量を  $x = R/r_s$  とすると、2 次元質量分布は、

$$\kappa(x) = \Sigma_{\text{sph}}/\Sigma_{\text{cr}} \quad (5.6)$$

と表される。ここで、

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{sph}}(x) &= 2 \int_0^\infty \rho(R, z) dz \\ &= \begin{cases} \frac{2r_s \delta_c \rho_c}{(x^2-1)} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right] & (x < 1) \\ \frac{2r_s \delta_c \rho_c}{3} & (x = 1) \\ \frac{2r_s \delta_c \rho_c}{(x^2-1)} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \arctan \sqrt{\frac{x-1}{1+x}} \right] & (x > 1) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7)$$

である。

シア  $\gamma_{\text{sph}}(x)$  は潮汐力によって生じるので、 $x$  より内部の平均 2 次元質量密度  $\bar{\Sigma}_{\text{sph}}(x)$  と  $x$  における 2 次元質量密度  $\Sigma_{\text{sph}}(x)$  の差に比例する。

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{sph}}(x) &= \frac{\bar{\Sigma}_{\text{sph}}(< x) - \Sigma_{\text{sph}}(x)}{\Sigma_c} \\ &= \bar{\kappa}(< x) - \kappa(x) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$\bar{\Sigma}_{\text{sph}}(x)$  は、 $\Sigma_{\text{sph}}(x)$  の面積平均なので、

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{\text{sph}}(x) &= \frac{\int \Sigma(x') d^2 x'}{\int d^2 x'} \\ &= \frac{\int_0^x x' \Sigma(x') dx'}{\int_0^x x' dx'} \\ &= \frac{2}{x^2} \int_0^x \Sigma(x') dx' \\ &= \begin{cases} \frac{4}{x^2} r_s \delta_c \rho_c \left[ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \left( \frac{x}{2} \right) \right] & (x < 1) \\ 4r_s \delta_c \rho_c \left[ 1 + \ln \left( \frac{1}{2} \right) \right] & (x = 1) \\ \frac{4}{x^2} r_s \delta_c \rho_c \left[ \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \arctan \sqrt{\frac{x-1}{1+x}} + \ln \left( \frac{x}{2} \right) \right] & (x > 1) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.9)$$

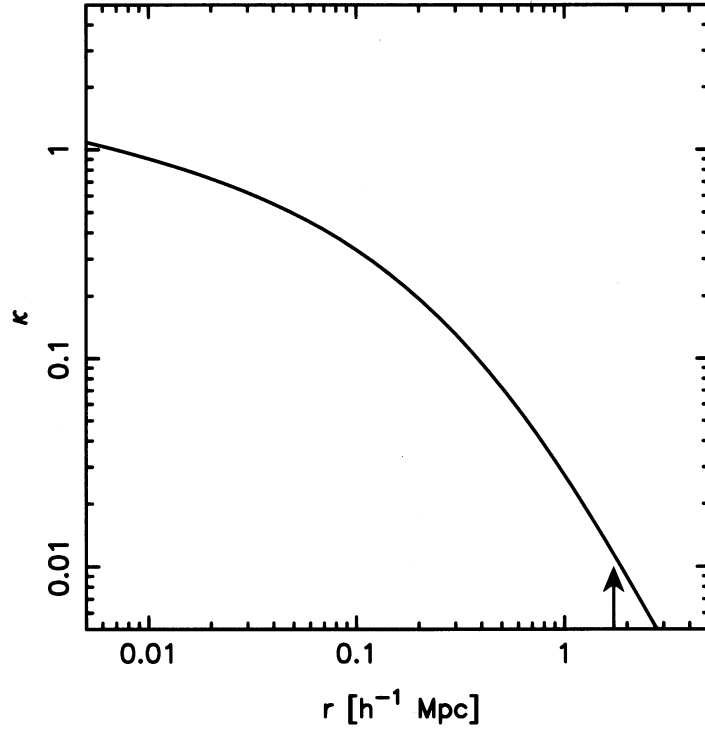


図 5.2 LCDN モデル ( $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7, h = 0.7$ ) において、 $z = 0.3$  にある  $M_{\text{vir}} = 1.0 \times 10^{15} (h^{-1} M_\odot)$ ,  $c_{\text{vir}} = 4.0$  の NFW プロファイルをもつハローの 2 次元質量分布。矢印は、このハローのビリアル半径を表す。

すると、シアーは  $x$  の関数として次のように表すことができる。

$$\gamma_{\text{sph}}(x) = \begin{cases} \frac{r_s \delta_c \rho_c}{\Sigma_c} g_{<}(x) & (x < 1) \\ \frac{r_s \delta_c \rho_c}{\Sigma_c} \left[ \frac{10}{3} + 4 \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right] & (x = 1) \\ \frac{r_s \delta_c \rho_c}{\Sigma_c} g_{>}(x) & (x > 1) \end{cases} \quad (5.10)$$

$$g_{<}(x) = \frac{8 \operatorname{arctanh} \sqrt{(1-x/(1+x))}}{x^2 \sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{x^2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{(x^2-1)} + \frac{4 \operatorname{arctanh} \sqrt{(1-x/(1+x))}}{(x^2-1)(1-x^2)^{1/2}} \quad (5.11)$$

$$g_{>}(x) = \frac{8 \arctan \sqrt{(1-x/(1+x))}}{x^2 \sqrt{x^2-1}} + \frac{4}{x^2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{(x^2-1)} + \frac{4 \arctan \sqrt{(1-x/(1+x))}}{(x^2-1)^{3/2}} \quad (5.12)$$

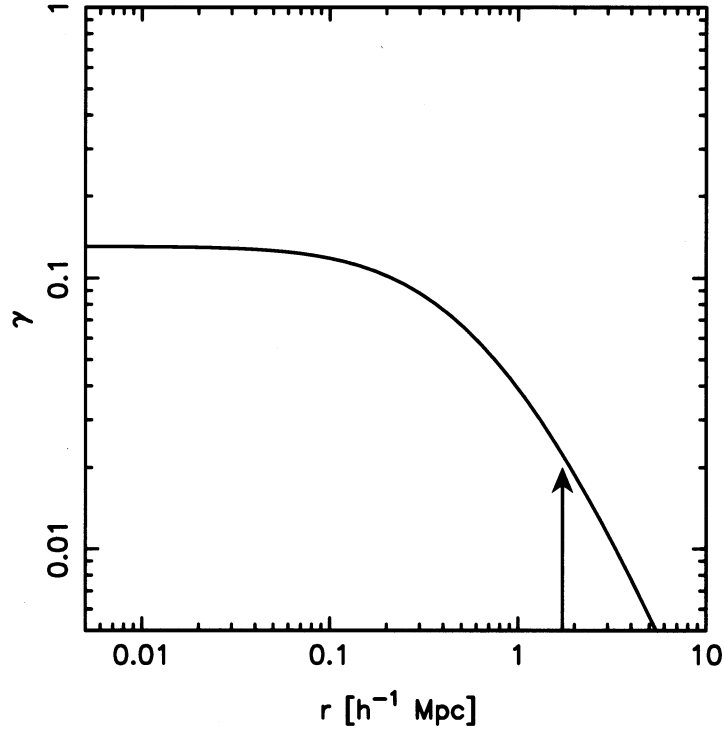


図 5.3 LCDN モデル ( $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7, h = 0.7$ ) において、 $z = 0.3$  にある  $M_{\text{vir}} = 1.0 \times 10^{15} (h^{-1} M_\odot)$ ,  $c_{\text{vir}} = 4.0$  の NFW プロファイルをもつハローの  $\gamma$  の大きさの分布。矢印は、このハローのピリアル半径を表す。

## 5.2 非球対称暗黒物質ハロー

### 5.2.1 Jing&Suto モデル

球対称暗黒物質ハローでは、2次元面密度  $\kappa(r)$  やシア  $\gamma(r)$  はハローの中心からの距離  $r$  だけで表され、しかも、それぞれの表式が解析的に求まっていることから、非常に扱いやすいというメリットがある。しかし、Jing&Suto(2002)[5] によると、シミュレーション結果から一般にハローは球対称ではなく、3軸不等な楕円体 (Jing&Suto モデル) でよく近似することができる。Jing&Suto モデルで近似されるハローの3次元密度プロファイルは次のように表される。

$$\rho(R) = \frac{\delta_{\text{cr}} \rho_{\text{crit}}(z)}{(R/R_e)(1 + R/R_e)^{3-\alpha}} \quad (5.13)$$

$$R^2 \equiv c^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right), \quad (a \leq b \leq c) \quad (5.14)$$

$\alpha$  の値は今だ確定していないが、多くのシミュレーションの結果は 1 と 1.5 の間の値を取ることを示している。

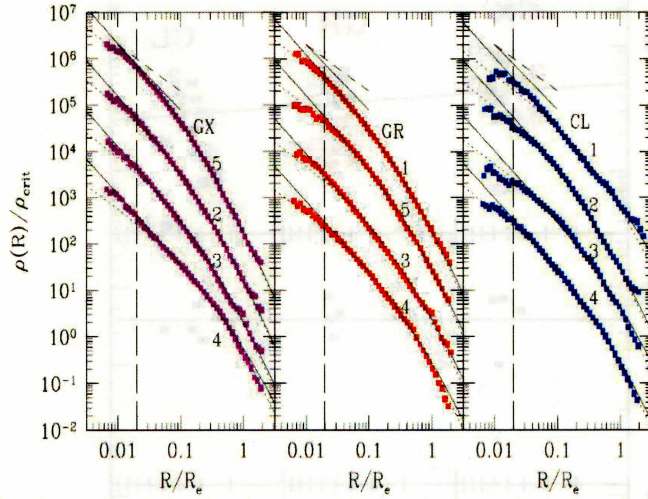


図 5.4 Jing&Suto(2002) より、左から銀河スケール、銀河群スケール、銀河団スケールの密度プロファイル。実線と点線の曲線はそれぞれ、(5.13) で  $\alpha = 1.5, 1.0$  としたときのフィッティング。各ハローの密度は見やすいように、上から 1、 $10^{-1}$ 、 $10^{-2}$ 、 $10^{-3}$  を掛けてある。

Jing&Suto モデルの中心集中度  $c_e$  は、

$$c_e \equiv \frac{R_e}{R_0} \quad (5.15)$$

と定義される。ここで  $R_e$  は、長軸の長さ  $R_e$  である楕円体の内部の平均密度が  $\Delta_e \Omega_m(z) \rho_{\text{crit}}(z)$  となるように定義される量である。 $\Omega_m(z)$ 、 $\rho_{\text{crit}}(z)$  はそれぞれ赤方偏移  $z$  のときの、物質の密度パラメーター、臨界密度を表している。また、 $\Delta_e$  は、

$$\Delta_e(z) = 5\Delta_{\text{vir}}(z) \left( \frac{c^2}{ab} \right)^{0.75} \quad (5.16)$$

と表される量である。 $\Delta_{\text{vir}}$  は球対称ハローの場合と同じく、系がビリアル平衡に達したときの、系の平均密度のバックグラウンドに対する密度超過を表している。すると、 $\delta_{\text{cr}}$  は  $c_e$  を用いて次のように表すことができる。

$$\delta_{\text{cr}} = \frac{\Delta_e \Omega_m(z)}{3} \frac{c_e^3}{m(c_e)} \quad (5.17)$$

$$m(c_e) = \begin{cases} \ln(1+c_e) - \frac{c_e}{1+c_e} & (\alpha = 1) \\ 2\ln(\sqrt{c_e} + \sqrt{1+c_e}) - 2\sqrt{\frac{c_e}{1+c_e}} & (\alpha = 1.5) \end{cases} \quad (5.18)$$

$R_0$  は Jing&Suto モデルのスケール半径であり、球対称ハローの  $r_s$  に対応している。Jing&Suto(2002) によると、シミュレーション結果から、 $c_{\text{vir}}/c_e$  と  $R_e/r_{\text{vir}}$  はスケール



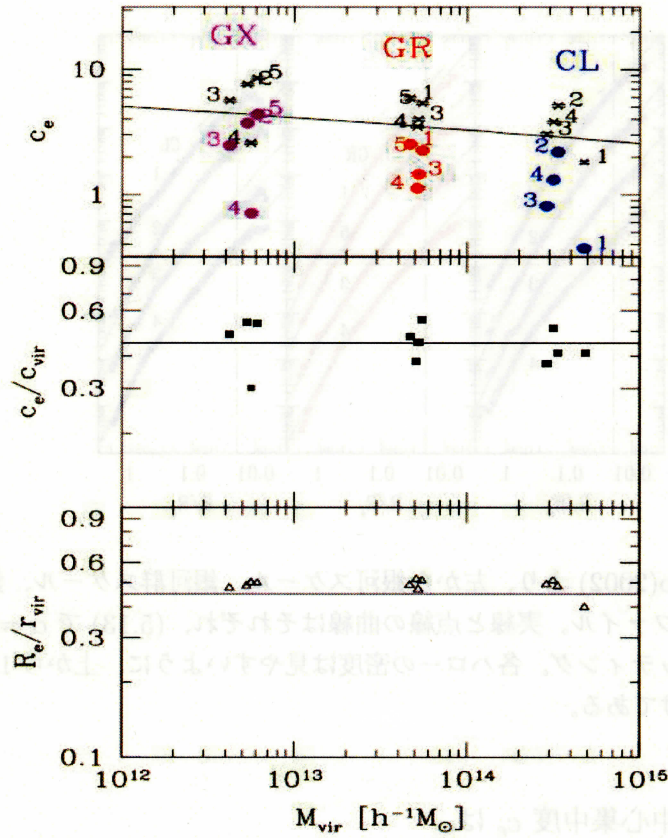


図 5.5 Jing&Suto(2002) より。上から順に、a)  $\alpha = 1$ (cross)、 $\alpha = 1.5$ (filled circle) のときの中心集中度  $c_e$ 。b)  $\alpha = 1$  のときの、 $c_e$  と球対称ハローの  $c_{\text{vir}}$  との比。c)  $r_{\text{vir}}$  に対する  $R_e$  の比

によらず、 $c_{\text{vir}}/c_e \simeq 0.45$ 、 $R_e/r_{\text{vir}} \simeq 0.45$  が成り立っている。したがって、 $R_0$  は系のビリアル質量  $M_{\text{vir}}$  が与えられると、

$$R_0 = 0.45 \frac{r_{\text{vir}}}{c_e} = \frac{0.45}{c_e} \left[ \frac{3M_{\text{vir}}}{4\pi \Delta_{\text{vir}} \Omega_m(z) \rho_{\text{crit}}(z)} \right] \quad (5.19)$$

というように求めることができる。

### 5.2.2 3次元質量分布の視線方向への投影

シミュレーションの結果から、暗黒物質ハローの密度プロファイルは (5.13) で表される Jing&Suto モデルでよく近似されることがわかっている。しかし、観測量はレンズ天体によって生じた遠方の銀河のシア、 $\gamma$  であり、この量はハローを天球面上に投影したときの2次元面密度  $\kappa$  によって決まる量である。そこで、Jing&Suto モデルを視線方向に投影したとき、2次元の密度プロファイルがどのように表されるのか考える必要があ

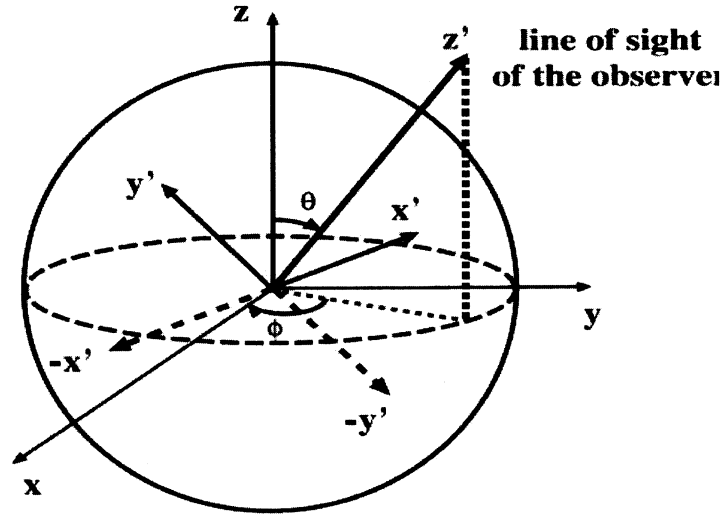


図 5.6 Oguri et al.[6] の Fig.1. デカルト座標  $(x, y, z)$  は、3 軸不等なハローの座標系、 $(x', y', z')$  は観測者の座標系を表す。 $z'$  の方向は、観測者の視線方向と一致させてある。 $x'$  は、 $x-y$  平面上にある。 $(\theta, \phi)$  は、 $(x, y, z)$  座標系での視線方向を表している。

る。この研究は、Oguri et al.[6] によってなされているのでその結果をまとめる。

初めに、2つのデカルト座標系  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  と  $\mathbf{x}' = (x', y', z')$  を導入する。 $\mathbf{x}$  は Jing&Suto モデルで表されるハローでの座標系、 $\mathbf{x}'$  は観測者の座標系を表す。2つの座標系の原点は、ともにハローの中心に一致するように取ってある。また、 $z'$  は観測者の視線方向と、 $z$  は3軸不等なハローの長軸の方向と一致しているとする。2つの座標系の関係は図(5.6)に示されている。一般に、2つの座標系があったとき、それらの変換は3つのオイラー角によって決まる。しかし、今は視線方向が固定され、 $x'-y'$  平面の  $x-y$  平面に対する回転角は任意なので、2つの角度  $(\theta, \phi)$  だけで相互の関係が決まる。 $\mathbf{x}$  座標と  $\mathbf{x}'$  座標の変換は次のように与えられる。

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' \quad (5.20)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & -\sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

次に、3次元密度プロファイルが(5.13)で表される Jing&Suto モデルを、任意の視線方向  $(\theta, \phi)$  に投影したときの2次元質量分布  $\kappa$  を求めることを考える。ここからは、軸の長さをスケール半径  $R_0$  で規格化したもので定義しなおす。

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}/R_0, \quad \mathbf{x}' \leftarrow \mathbf{x}'/R_0 \quad (5.22)$$



すると、3次元の密度プロファイルは、

$$\rho(R) = \frac{\delta_{\text{ce}} \rho_{\text{crit}}(z)}{R^\alpha (1+R)^{3-\alpha}} \quad (5.23)$$

$$R^2 \equiv c^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \quad (5.24)$$

と書き直すことができる。(5.24) はハローの座標系  $\mathbf{x}$  で表された式だが、これを観測者の座標系  $\mathbf{x}'$  で表すと次のように書ける。

$$R = \sqrt{f z'^2 + g z' + h} \quad (5.25)$$

ここで、 $f, g, h$  は  $(\theta, \phi, a, b, c)$  を用いて次のようになる。

$$f = \sin^2 \left( \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \phi + \frac{c^2}{b^2} \sin^2 \phi \right) + \cos^2 \theta \quad (5.26)$$

$$g = \sin \theta \sin 2\phi \left( \frac{c^2}{b^2} - \frac{c^2}{a^2} \right) x' + \sin 2\theta \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \phi - \frac{c^2}{b^2} \sin^2 \phi \right) y' \quad (5.27)$$

$$h = \left( \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \phi + \frac{c^2}{b^2} \cos^2 \phi \right) x'^2 + \sin 2\phi \cos \theta \left( \frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2} \right) x' y' + \left[ \cos^2 \theta \left( \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \phi + \frac{c^2}{b^2} \sin^2 \phi \right) + \sin^2 \theta \right] y'^2 \quad (5.28)$$

さらに、 $z'_*$  と  $\zeta$  という変数を

$$z'_* \equiv \sqrt{f} \left( z' + \frac{g}{2f} \right) \quad (5.29)$$

$$\zeta \equiv h - \frac{g^2}{4f} \quad (5.30)$$

と定義すると、(5.25) の  $R$  は、

$$R = \sqrt{z'_* + \zeta^2} \quad (5.31)$$

と書き直すことができる。このとき、 $\rho(R)$  を  $z'$  方向に投影することで  $\kappa$  を求めると、次

のようになる。

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{R_0}{\Sigma_{\text{crit}}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(R) dz' \\ &= \frac{R_0}{\Sigma_{\text{crit}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{f}} \rho(\sqrt{z'^2 + \zeta^2}) dz' \\ &\equiv \frac{b_{\text{TNFW}}}{2} f_{\text{GNFW}}(\zeta)\end{aligned}\quad (5.32)$$

$$b_{\text{TNFW}} \equiv \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{4\delta_{\text{ce}} \rho_{\text{crit}}(z) R_0}{\Sigma_{\text{crit}}} \quad (5.33)$$

$$f_{\text{GNFW}}(\zeta) \equiv \int_0^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{r^2 + z^2})^\alpha (1 + \sqrt{r^2 + z^2})^{3-\alpha}} dz \quad (5.34)$$

$\alpha = 1$  のときは、 $f_{\text{GNFW}}(r)$  の関数形は解析的に求まっている。

$$f_{\text{GNFW}}(r) = \begin{cases} \frac{1}{1-r^2} \left[ -1 + \frac{2}{\sqrt{1-r^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \right] & (r < 1) \\ \frac{1}{3} & (r = 1) \\ \frac{1}{r^2-1} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{r^2-1}} \operatorname{arctan} \sqrt{\frac{r-1}{r+1}} \right] & (r > 1) \end{cases} \quad (5.35)$$

変数  $\zeta$  の意味は、(5.26)~(5.28) を (5.30) に代入すると理解しやすくなる。 $\zeta$  を座標系  $\mathbf{x}'$  で表すと、

$$\zeta^2 = \frac{1}{f} (Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2) \quad (5.36)$$

$$A \equiv \cos^2 \theta \left( \frac{c^2}{a^2} \sin^2 \phi + \frac{c^2}{b^2} \cos^2 \phi \right) + \frac{c^2}{a^2} \frac{c^2}{b^2} \sin^2 \theta \quad (5.37)$$

$$B \equiv \cos \theta \sin 2\phi \left( \frac{c^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (5.38)$$

$$C \equiv \frac{c^2}{b^2} \sin^2 \phi + \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \phi \quad (5.39)$$

となる。(5.36) は 2 次形式の形をしているが、

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \frac{B}{A-C} \quad (5.40)$$

で計算される角度  $\psi$  だけ、 $x' - y'$  平面を回転させると対角化させることができる。

$$\zeta^2 = \frac{x'^2}{q_x^2} + \frac{y'^2}{q_y^2} \quad (5.41)$$

ここで、 $q_x$  と  $q_y$  は次のように定義される。

$$q_x^2 \equiv \frac{2f}{A + C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}} \quad (5.42)$$

$$q_y^2 \equiv \frac{2f}{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}} \quad (5.43)$$

このとき、 $q_x \geq q_y$  が常に成り立っている。したがって、 $\zeta$  の等値線は、 $q_x$  を長軸、 $q_y$  を短軸とする楕円になることがわかる。つまり、観測者に対して任意の角度  $(\theta, \phi)$  傾いている Jing&Suto モデルを天球面上に投影すると、その2次元質量分布  $\kappa$  は常に楕円形をしていることになる。

$$\kappa(\zeta) = \kappa\left(\sqrt{\frac{x'^2}{q_x^2} + \frac{y'^2}{q_y^2}}\right) \quad (5.44)$$

また、 $q_x$  と  $q_y$  から投影されたハローの長軸と短軸の比  $q$  という量を、

$$q \equiv \frac{q_y}{q_x} = \left(\frac{A + C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}\right)^{1/2} \quad (5.45)$$

と定義すると、 $\kappa$  は

$$\kappa = \kappa(\xi), \quad \xi^2 = x'^2 + y'^2/q^2 \quad (5.46)$$

と表すことができる。

### 5.2.3 Jing&Suto モデルによって生じるシアー

前節までの結果から、Jing&Suto モデルを視線方向に投影すると、その2次元質量分布の等高線は必ず楕円形になるということがわかった。ここからは、そのような楕円形の2次元質量分布に  $\kappa$  よって生じることになるシアー  $\gamma$  を計算することを考える。

第2章で見たように、 $\kappa$  を用いてポテンシャル  $\psi$  を

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\theta' \kappa(\theta') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'| \quad (3.11)$$

と定義すると、シアーの2つの成分はその2階微分によって計算される。

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\psi_{,11} - \psi_{,22}), \quad \gamma_2 = \psi_{,12} \quad (3.14)$$

よって、シアーマップを求めたいときには、原理的には  $\kappa$  を2階積分して  $\psi$  を求め、その後  $\psi$  を2階微分すればよい。しかし、実際に数値計算しようとする、この方法では計算が非常に繁雑になってしまい効率的ではない。ところが、Asano&Fukuyama(1998)[9]

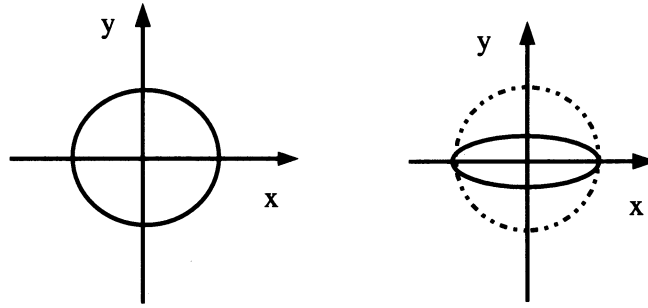


図 5.7 左の図は、球対称なハローを天球に投影すると、質量の等高線が円に見えることを示している。右の図は、 $x$  軸方向の長さを固定したまま、 $y$  軸方向からつぶして質量分布を楕円形にしたもの。Keeton(2001) はこのとき生じるシアアの求め方を示した。

や Keeton(2001)[10] によると、質量分布が楕円形であるときの  $\kappa$  を 1 階積分するだけで  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$  を求めることができる。この方法は、Jing&Suto モデルによって生じるシアアの計算にも応用することができるので下にまとめる。

初めに、 $\kappa$  の等高線は次のように楕円形として書けるとする。

$$\kappa = \kappa(\xi), \quad \xi^2 = x^2 + y^2/q^2 \quad (5.47)$$

ここで、 $q$  は  $\kappa$  の等高線の長軸と短軸の比を表す。すると、ポテンシャル  $\psi$  とその 2 階微分は次のようにして計算することができる。

$$\psi(x, y) = \frac{q}{2} I(x, y) \quad (5.48)$$

$$\psi_{,xx}(x, y) = 2qx^2 K_0(x, y) + qJ_0(x, y) \quad (5.49)$$

$$\psi_{,yy}(x, y) = 2qy^2 K_2(x, y) + qJ_1(x, y) \quad (5.50)$$

$$\psi_{,xy}(x, y) = 2qxy K_1(x, y) \quad (5.51)$$

ここで、

$$I(x, y) = \int_0^1 \frac{\xi(u)}{u} \frac{\phi_r(\xi(u))}{[1 - (1 - q^2)u]^{1/2}} du \quad (5.52)$$

$$J_n(x, y) = \int_0^1 \frac{\kappa(\xi(u)^2)}{[1 - (1 - q^2)u]^{1/2}} du \quad (5.53)$$

$$K_n(x, y) = \int_0^1 \frac{u\kappa'(\xi(u)^2)}{[1 - (1 - q^2)u]^{n+1/2}} du \quad (5.54)$$

$$\kappa'(\xi^2) = \frac{d\kappa(\xi^2)}{d(\xi^2)} = \frac{1}{\theta_s^2} \frac{d\kappa(\xi/\theta)}{d(\xi^2/\theta_s^2)} \quad (5.55)$$

$$\xi(u)^2 = u \left( x^2 + \frac{y^2}{1 - (1 - q^2)u} \right) \quad (5.56)$$

暗黒物質ハローの密度プロファイルが

$$\rho = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2} \quad (5.57)$$

という NFW プロファイルの場合、(5.52) の被積分関数に現れる  $\phi_r$  は、

$$\phi_r(r) = \begin{cases} 4\kappa_s r_s \frac{\ln(x/2) + \operatorname{arctanh}(\sqrt{1-x^2})/\sqrt{1-x^2}}{x} & (x < 1) \\ 4\kappa_s r_s \left\{ \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \right\} & (x = 1) \\ 4\kappa_s r_s \frac{\ln(x/2) + \operatorname{arctan}(\sqrt{x^2-1})/\sqrt{x^2-1}}{x} & (x > 1) \end{cases} \quad (5.58)$$

また、(5.53) や (5.54) の被積分関数に現れる  $\kappa$  や  $\kappa'$  は次のように書ける。

$$\kappa(r) = \begin{cases} 2\kappa_s \frac{1 - \operatorname{arctanh}(\sqrt{1-x^2})/\sqrt{1-x^2}}{x^2-1} & (x < 1) \\ \frac{2\kappa_s}{3} & (x = 1) \\ 2\kappa_s \frac{1 - \operatorname{arctan}(\sqrt{x^2-1})/\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} & (x > 1) \end{cases} \quad (5.59)$$

$$\kappa'(r) = \begin{cases} \frac{2\kappa_s}{\theta_s^2} \frac{3x^2 \operatorname{arctanh}(\sqrt{1-x^2})/\sqrt{1-x^2} - 2x^2 - 1}{2x^2(1-x^2)^2} & (x < 1) \\ -\frac{4\kappa_s}{5} \frac{1}{\theta_s^2} & (x = 1) \\ \frac{2\kappa_s}{\theta_s^2} \frac{3x^2 \operatorname{arctan}(\sqrt{x^2-1})/\sqrt{x^2-1} - 2x^2 - 1}{2x^2(1-x^2)^2} & (x > 1) \end{cases} \quad (5.60)$$

ここで、 $\kappa_s$  は NFW モデルの  $r_s, \delta_c$  を用いて

$$\kappa_s \equiv \frac{r_s \delta_c \rho_{\text{crit}}(z)}{\Sigma_{\text{cr}}} \quad (5.61)$$

と表される量である。したがって、シアーは  $\psi$  の 2 階微分の組合せで書けるので、(5.49) ~ (5.51) から  $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  を求めることができることになる。

この Keeton の方法を用いて、2 次元質量密度が (5.47) で与えられ、ビリアル質量が  $M_{\text{vir}} = 1.0 \times 10^{15} M_\odot$ 、中心集中度が  $c_{\text{vir}} = 4.0$ 、長軸と短軸の軸比が  $q = 0.5$  である

ハローの  $\kappa, \psi$  とこのハローによって生じるシアーの大きさ  $|\gamma|$  の等高線を第 1 象限でプロットすると (5.8)~(5.11) のような結果が得られた。また、シアーとポテンシャルの等高線が、楕円からどのくらいずれているのかを見るために、等高線と、等高線の  $x$  軸、 $y$  軸の交点を通る楕円を同時にプロットすると、(5.12)~(5.13) のようになる。

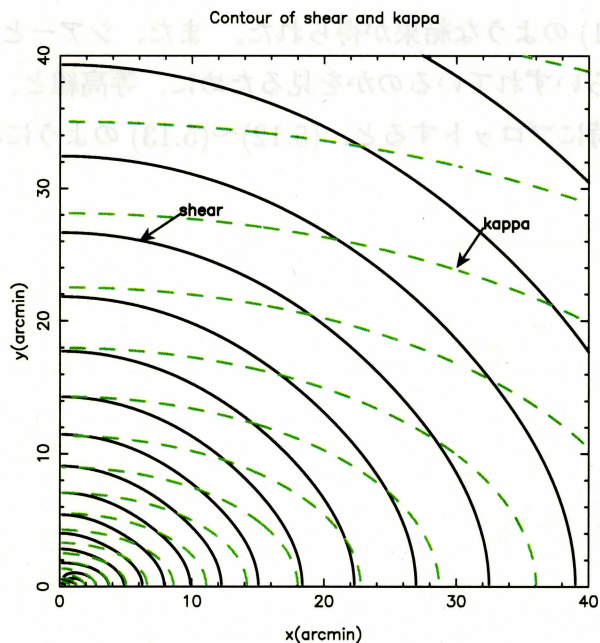


図 5.8  $q=0.5, c=4.0, M_{\text{vir}}=1.0 \times 10^{15} M_{\text{sun}}$  の暗黒物質ハローの質量分布とそれによって生じるシアアの等高線。LCDM モデルを仮定し、光源の赤方偏移を  $z_s = 1.0$ 、ハローの赤方偏移を  $z = 1.0$  とした。以下同じ。

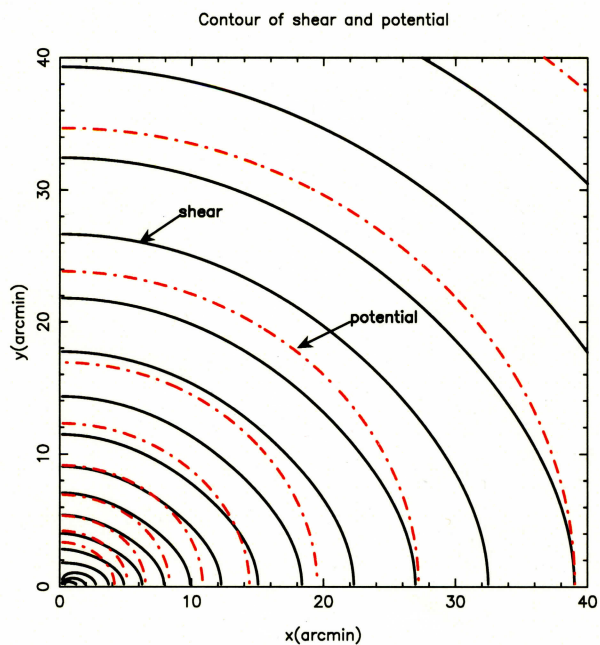


図 5.9  $q=0.5, c=4.0, M_{\text{vir}}=1.0 \times 10^{15} M_{\text{sun}}$  の暗黒物質ハローの質量分布に対応するポテンシャルと、それによって生じるシアアの等高線。

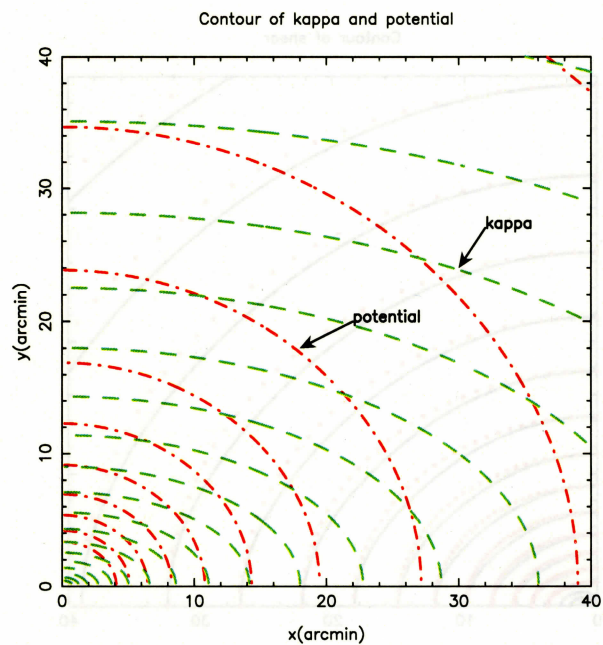


図 5.10  $q=0.5, c=4.0, M_{\text{vir}}=1.0 \times 10^{15} M_{\text{sun}}$  の暗黒物質ハローの質量分布とそれに対応するポテンシャルの等高線。

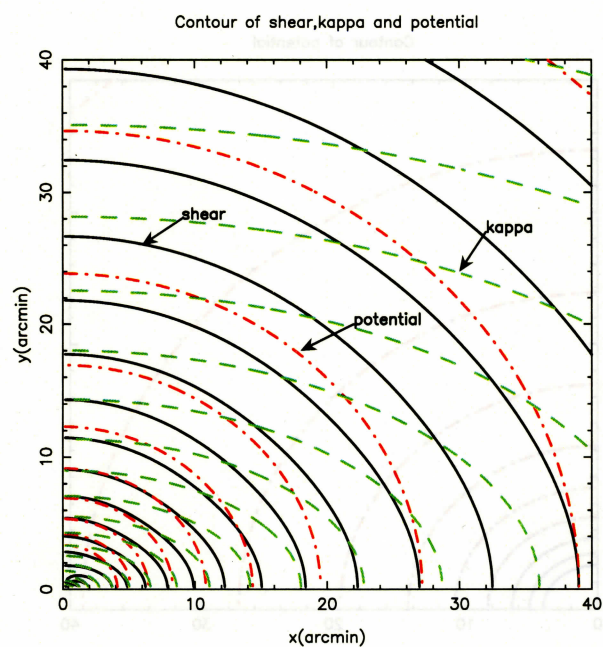


図 5.11  $q=0.5, c=4.0, M_{\text{vir}}=1.0 \times 10^{15} M_{\text{sun}}$  の暗黒物質ハローの質量分布とそれに対応するポテンシャル、暗黒物質によって生じるシアアの等高線。



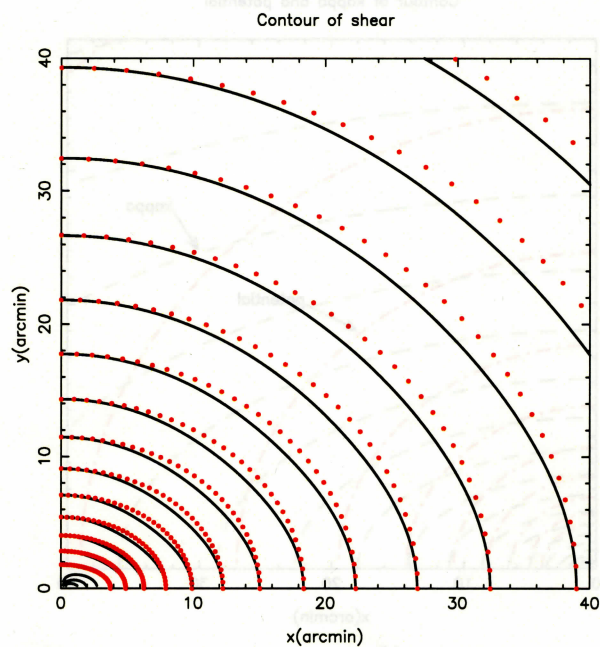


図 5.12 シアの等高線の楕円からのずれ

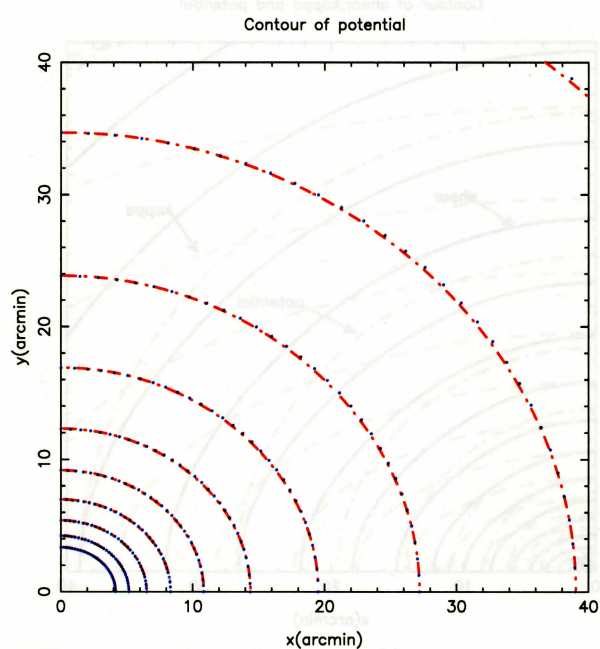


図 5.13 ポテンシャルの等高線の楕円からのずれ

暗黒物質ハローが球対称な質量分布を持っているときは、シアーは質量分布に沿う接線方向の成分だけを持ち、その等高線は質量分布と同じ円になった。しかし、図 5.8 から図 5.11 を見るとわかるように、暗黒物質ハローの質量分布が楕円のときは、シアーやポテンシャルの等高線は、 $\kappa$  の等高線とはまったく一致しない。また、図 5.12 は、シアーの等高線と、その等高線が  $x$  軸、 $y$  軸と交わる点を通るような楕円からのずれを表しているが、暗黒物質ハローの質量分布が楕円のとき、シアーの等高線は楕円形でもないという結果が得られた。一方、ポテンシャルの等高線が楕円からどのくらいずれているのかを示した図 5.13 から、ポテンシャルの等高線は、 $\kappa$  の等高線とは一致しないが楕円形になっているという結果が得られた。

ここで、Keeton の方法をそのまま用いているときは、NFW モデルを  $x$  軸方向の長さを固定したまま、 $y$  軸方向からつぶしたものを考えていて、さらに、 $\kappa$  の振幅は球対称ハローの振幅を使っている。よって、このままでは  $\gamma$  や  $\kappa$  の大きさは正確ではない。しかし、2次元質量分布は  $(q, c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, \varphi(\text{データ領域の } x \text{ 軸と質量分布の長軸のなす角度}))$  の 4 つのパラメーターで決まる。一方、Jing&Suto モデルを天球に投影したときの  $\kappa$  の正しい表現は (5.32) で与えられるが、この場合は投影方向  $(\theta, \phi)$  や軸比  $(a/c, b/c)$  は観測ではわからない。このことから、Jing&Suto モデルの 2次元質量分布は  $(c_e, M_{\text{vir}}^{\text{JS}}, c/a, c/b, \theta, \phi)$  の 6 つのパラメーターで決まる。そこで、次の章からはパラメーターの数は少なくとも  $\kappa$  をより正確に表現できる方法を考えていく。



## 第6章

# 確率分布関数

### 6.1 軸比の確率分布関数

LCDM モデルにおいて、個々の銀河団スケールの Jing&Suto モデルをとってくと、その軸比 ( $a/c, b/c$ ) はそれぞれ異なる値を持っている。しかし、Jing&Suto(2002) または、Oguri et al.(2003) によると、シミュレーション結果から経験的に、軸比の確率分布が次のような関数で与えられることがわかっている。

$$p(a/c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 0.113} \times \exp \left\{ -\frac{[(a/c)(M_{\text{vir}}/M_*)^{0.07[\Omega_m(z)]^{0.7}} - 0.54]^2}{2(0.113)^2} \right\} \times \left( \frac{M_{\text{vir}}}{M_*} \right)^{0.07[\Omega_m(z)]^{0.7}} \quad (6.1)$$

$$P(a/b|a/c) = \begin{cases} \frac{3}{2[1-\max(a/c, 0.5)]} \times \left\{ 1 - \left[ \frac{2a/b-1-\max(a/c, 0.5)}{1-\max(a/c, 0.5)} \right]^2 \right\} & (a/b \geq \max(a/c, 0.5)) \\ 0 & (a/b < \max(a/c, 0.5)) \end{cases} \quad (6.2)$$

ここで、 $M_*$  は、トップハット関数で重みをつけて計算した密度超過が  $\sigma(M_*, z) = 1.68$  となるような質量を表す。また、ハローの方向はランダムであると仮定すると、 $\theta, \phi$  の確率分布関数は

$$P(\theta) = \frac{\sin \theta}{2}, \quad P(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad (6.3)$$

となる。

天球面上に投影された Jing&Suto モデルの質量分布は楕円となり、その長軸、短軸とそれらの比  $q_x, q_y, q$  は、(5.42)、(5.43)、(5.45) からわかるように、( $a/c, b/c, \theta, \phi$ ) の関数である。よって、ここで与えられた確率分布関数を用いると、 $q, q_x, q_y$  の確率分布関数を計算することができる。

例として、 $q$  の確率分布関数  $P(q)$  について考えてみる。 $q$  を

$$q = q(a/c, b/c, \theta, \phi) \quad (6.4)$$

と表す。ある値  $q$  となる確率は、上の式を満たす  $a/c, b/c, \theta, \phi$  の組合せについてそれぞれの確率を積分すれば求まる。

$$P(q)dq = dq \int P(a/c, b/c, \theta, \phi) d(a/c) d(b/c) d\theta d\phi \quad (6.5)$$

ここで、 $a/c, b/c, \theta$  と  $\phi$  は独立なので、被積分関数の確率はそれぞれの確率の積として書ける。

$$P(a/c, b/c, \theta, \phi) d(a/c) d(b/c) d\theta d\phi = P(a/c, b/c) P(\theta) P(\phi) d(a/c) d(b/c) d\theta d\phi \quad (6.6)$$

次に、 $P(a/c, b/c)$  は条件付き確率を用いると、2つの確率の積として表すことができる。

$$\begin{aligned} P(a/c, b/c) d(a/c) d(b/c) &= P(a/c) d(a/c) P(b/c|a/c) d(b/c) \\ &= P(a/c) d(a/c) P(a/b|a/c) p(a/b) d(a/b) \end{aligned} \quad (6.7)$$

2行目の等式は、 $a/c$  を固定したとき  $b/c$  の分布から  $a/b$  の分布が一意に決まることから成り立つ。よって、 $P(q)$  は (6.1)~(6.3) から計算することができる。図 (6.1) は、このようにして求めた  $q, q_x, q_y$  の確率分布である。

## 6.2 ビリアル質量 ( $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$ ), 中心集中度 ( $c_{\text{vir}}$ ) の確率分布関数

ここからは、ある Jing&Suto モデルを天球面上に投影し、それを NFW モデルをつぶしたものとして解釈したときの、NFW モデルのビリアル質量  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  と中心集中度  $c_{\text{vir}}$  の分布関数について考えていく。

天球面に投影された Jing&Suto モデルを NFW モデルをつぶしたもので近似する方法の1つとして、4章で見た Keeton(2002) の方法がある。この方法では、ハローの天球面上での質量分布を

$$\kappa(r) = 2\kappa_s \times F(x), \quad r^2 = x^2 + y^2/q^2 \quad (6.8)$$

$$F(x \equiv r/r_s) = \begin{cases} \frac{1 - \text{arctanh}(\sqrt{1-x^2})/\sqrt{1-x^2}}{x^2-1} & (x < 1) \\ \frac{1}{3} & (x = 1) \\ \frac{1 - \text{arctan}(\sqrt{x^2-1})/\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} & (x > 1) \end{cases} \quad (6.9)$$

というように、ハローの中心からの距離  $r$  に依存する関数  $F(r)$  と宇宙論パラメータなどで決まる振幅  $2\kappa_s$  の積で書くことができた。しかし、 $F(r)$  に注目すると、 $r = \sqrt{x^2 + y^2/q^2}$  は NFW モデルの  $x$  軸方向は固定したまま、 $y$  軸方向をつぶしたこと

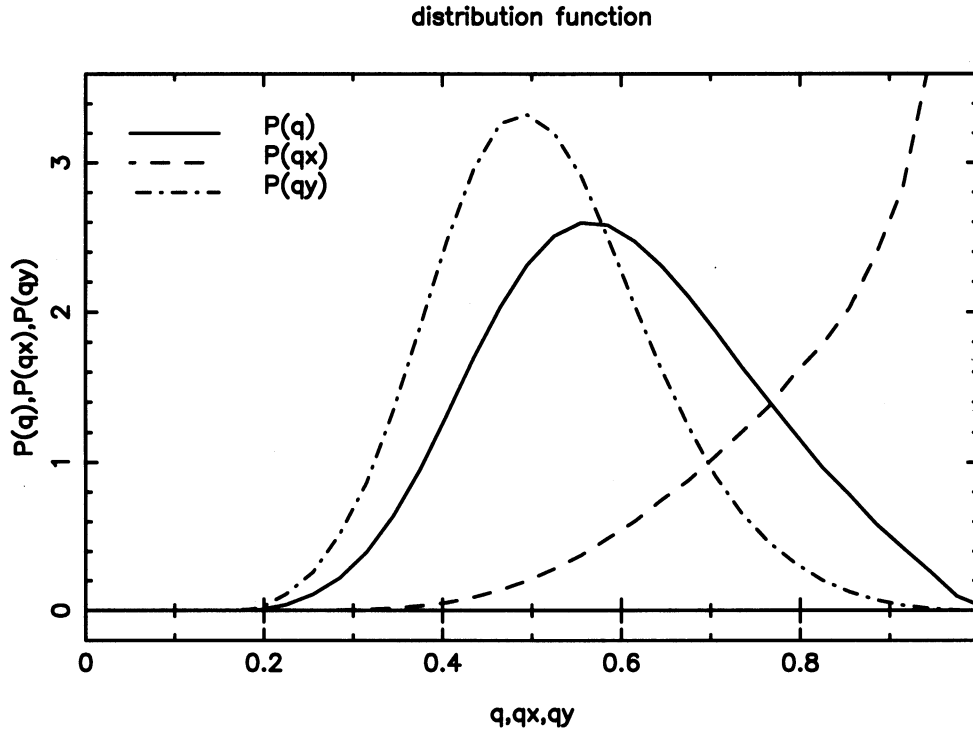


図 6.1  $M_{\text{vir}} = 1.0 \times 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ , 赤方偏移  $z = 0.3$  の Jing&Suto モデルを天球面上に投影したときの  $q, q_x, q_y$  の確率分布関数  $P(q), P(q_x), P(q_y)$  をプロットした。宇宙論パラメーターは LCDM ( $\Omega_m = 0.3, \Omega_{\Lambda} = 0.7, h = 0.7$ ) を仮定した。

を意味している。そこで、NFW モデルを  $y$  軸方向からつぶしたときに、 $x$  軸方向に広がることを考慮するために、 $r$  を

$$r = \sqrt{(1-e)x^2 + (1+e)y^2} = \sqrt{1-e} \sqrt{x^2 + y^2/q^2} \quad (6.10)$$

と表すことにする。 $e$  は  $q$  を用いて、

$$q^2 = \frac{1-e}{1+e} \Leftrightarrow e = \frac{1-q^2}{1+q^2} \quad (6.11)$$

と表される。すると、このときの  $\kappa$  は、

$$\kappa = 2\kappa_s \times F(\sqrt{1-e} r/r_s) \quad (6.12)$$

となる。この式が Jing&Suto モデルを天球面に投影したものであると解釈して、

$$\kappa(r) = \frac{b_{\text{TNFW}}}{2} \times F(\sqrt{x^2 + y^2/q^2}/q_x) \quad (5.32)$$

と比較すると、Jing&Suto モデルのビリアル質量  $M_{\text{vir}}^{\text{JS}}$ 、中心集中度  $c_e$  と NFW ハローのビリアル質量  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$ 、中心集中度  $c_{\text{vir}}$  の関係式が得られる。

まず、2つの式の振幅は、

$$\begin{aligned} \frac{b_{\text{TNFW}}}{2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{4\delta_c e \rho_{\text{cr}}(z) R_0}{\Sigma_{\text{cr}}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{4}{\sqrt{f}} \frac{5}{3} \Delta_{\text{vir}} \left( \frac{c^2}{ab} \right)^{0.75} \frac{\Omega_m(z) \rho_{\text{cr}}(z) R_e}{\Sigma_{\text{cr}}} \frac{R_e}{c_e} \times f(x) \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$2\kappa_s = 2 \frac{\delta_c \rho_{\text{cr}}(z) r_s}{\Sigma_{\text{cr}}} \frac{r_{\text{vir}}^{\text{NFW}}}{c_{\text{vir}}} \times f(c_{\text{vir}}) \quad (6.14)$$

と表される。ここで、 $f(x)$  という関数を

$$f(x) = \frac{x^3}{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}} \quad (6.15)$$

と定義した。 $b_{\text{TNFW}}/2 = 2\kappa_s$  とすると、

$$\frac{5}{\sqrt{f}} \left( \frac{c^2}{ab} \right)^{0.75} \frac{R_e}{c_e} f(c_e) = \frac{r_{\text{vir}}^{\text{NFW}}}{c_{\text{vir}}} f(c_{\text{vir}}) \quad (6.16)$$

という関係があることがわかる。一方、関数  $F(x)$  の変数を比較すると、

$$\frac{c_e}{R_e} \frac{1}{q_x} = \frac{c_{\text{vir}}}{r_{\text{vir}}^{\text{NFW}}} \sqrt{1-e} \quad (6.17)$$

が成り立っていなければならないことがわかる。これら2つの式から  $r_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  を消去すると、 $c_e$  と  $c_{\text{vir}}$  の関係が求まる。

$$f(c_{\text{vir}}) = \frac{1}{\sqrt{1-e}} \frac{1}{q_x} \frac{1}{\sqrt{f}} 5 \left( \frac{c^2}{ab} \right)^{0.75} f(c_e) \quad (6.18)$$

また、(6.16) からビリアル半径をビリアル質量で表すことで、 $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  と  $M_{\text{vir}}^{\text{JS}}$  の関係式が得られる。

$$M_{\text{vir}}^{\text{NFW}} = 0.45^3 q_x^3 (1-e)^{3/2} \left( \frac{c_{\text{vir}}}{c_e} \right)^3 M_{\text{vir}}^{\text{JS}} \quad (6.19)$$

$e, f, q_x$  などは  $a/c, b/c, \theta, \phi$  の関数なので、ある Jing&Suto モデルについて、 $M_{\text{vir}}^{\text{sph}}, c_{\text{vir}}$  の確率分布関数を計算することができる。

図(6.2)と(6.3)は、典型的な Jing&Suto モデル ( $M_{\text{vir}}^{\text{JS}} = 1.0 \times 10^{15} h^{-1} M_{\odot}, \bar{c}_e$ ) を、NFW モデルをつぶしたものとして解釈したときの  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, c_{\text{vir}}$  の確率分布を計算したものである。 $\bar{c}_e$  は、Oguri et al.(2003) の(14)式を用いて計算した、典型的な Jing&Suto モデルの中心集中度である。

$$\begin{aligned} \bar{c}_e &= 1.35 \left\{ - \left[ \frac{0.3}{(a/c)(M_{\text{vir}}^{\text{JS}}/M_*)^{0.07[\Omega_m(z)]^{0.7}}} \right]^2 \right\} \\ &\times A_e \sqrt{\frac{\Delta_{\text{vir}}(z_c)}{\Delta_{\text{vir}}(z)}} \left( \frac{1+z_c}{1+z} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (6.20)$$

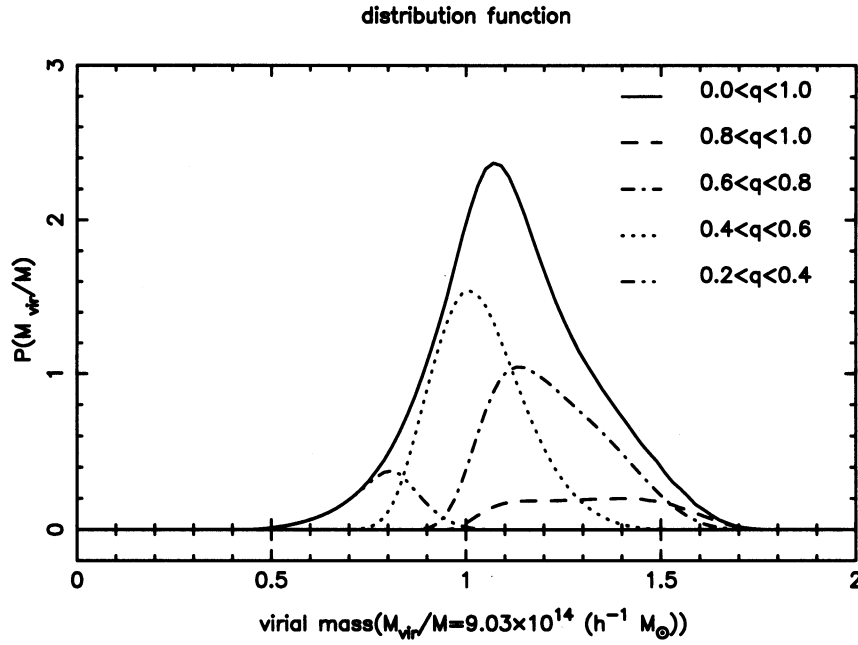


図 6.2 典型的な Jing&Suto モデル ( $M_{\text{vir}}^{\text{JS}} = 1.0 \times 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ ),  $\bar{c}_e$  を、NFW モデルをつぶしたものとして解釈したときの、ビリアル質量の確率分布。

ここで、 $A_e$  は、Jing&Suto(2002) によって  $A_e = 1.1$  と見積もられている。 $a/c$  は典型的な値として、0.4 を用いた。 $z_c$  はハローの collapse redshift を表していて、次のように定義される。

$$\text{erfc} \frac{\delta_x(z_c) - \delta_c}{\sqrt{2[\sigma^2(fM) - \sigma^2(M)]}} = \frac{1}{2} \quad (6.21)$$

$\sigma(M)$  は、 $z = 0$  における  $r \propto M^{1/3}$  スケールでの密度超過の 2 乗平均、 $\delta_c = 1.68$ 、 $\delta_c(z) = 1.68/D(z)$ 、 $D(z)$  は線形成長のグロスファクター、 $f = 0.01$  である。これらの値を代入すると、 $\bar{c}_e = 1.17$  となる。横軸の  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$ 、 $c_{\text{vir}}$  は、典型的な Jing&Suto モデルを中間の長さをも積軸の方向 ( $\theta = \pi/2, \phi = \pi/2$ ) に投影したときの値でそれぞれ規格化した。



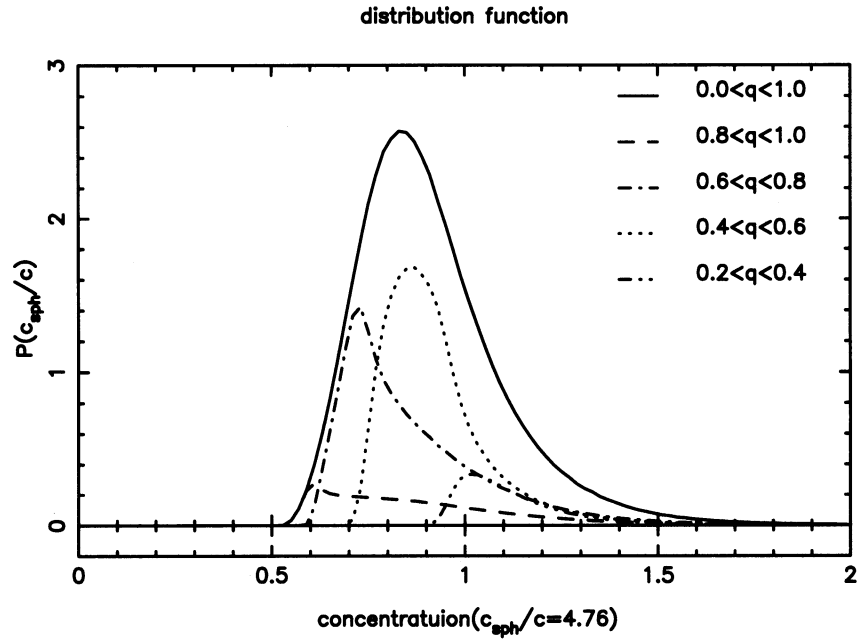


図 6.3 典型的な Jing&Suto モデル ( $M_{\text{vir}}^{\text{JS}} = 1.0 \times 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ ),  $\bar{c}_e$  を、NFW モデルをつぶしたものとして解釈したときの、中心集中度の確率分布。

これらの確率分布のピークは、およそ  $M_{\text{vir}} \sim 1.0 \times 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ ,  $c_{\text{vir}} \sim 4.0$  にあることがわかる。つまり、Jing&Suto モデルを、NFW モデルを (6.10) のようにつぶしたものとして解釈したとしても、ほぼ正確なビリアル質量、中心集中度を見積もることができる。また、それぞれの図の破線は、見掛け上のハローの形  $q$  について分類したときの確率分布を表している。この結果からは  $q$  が 1 に近い、つまり、天球上で比較的丸く見えるときは、質量は大きく見積もる確率が、中心集中度は小さく見積もる確率が高いことを示している。

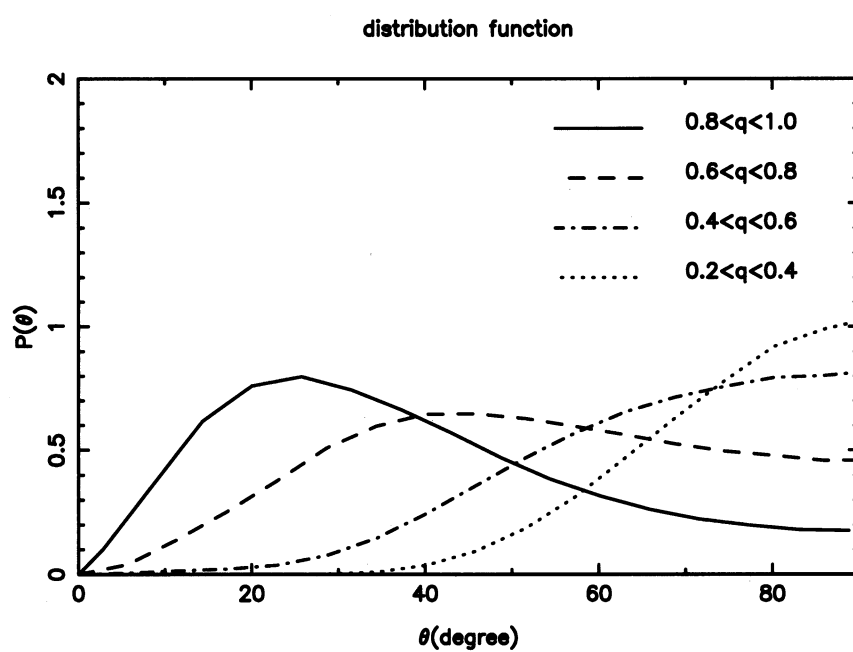


図 6.4 典型的な Jing&Suto モデル ( $M_{\text{vir}}^{\text{JS}} = 1.0 \times 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ ),  $\bar{c}_e$  を天球に投影したときの、見掛けの形  $q$  と視線方向  $\theta$  の確率分布。



## 第 7 章

### 3 軸不等なハローの形の制限

銀河団暗黒物質ハローの長軸と短軸の比  $q$  を求めることは、冷たい暗黒物質が支配的な宇宙の構造形成モデルを検証する上で重要な役割を果たす。この章では、 $q$  をパラメータのフィッティングで決定する方法を示し、理論的に  $q$  をどのくらいの精度で決定することができるのかを計算する。最後に、実際の観測データに適用して 1 つの銀河団ハローの  $q$  を求める。

#### 7.1 ハローの形状制限の方法

ある暗黒物質ハローによって生じたシアーマップを考える。また、シアーマップはいくつかの量をパラメーター ( $p_k$ ) として暗黒物質ハローの質量分布をモデル化し、理論的に計算することができる。どのようなパラメーターの組合せのモデルが最も観測データと合うのかを見積もるためには、次のように計算される  $\chi^2$  という量を求めるとよい。

$$\chi^2(p_k) = \sum_{i,j,\alpha,\beta} (\gamma_{i,\alpha}^{\text{obs}} - \gamma_{i,\alpha}^{\text{model}}(p_k)) \times (N^{-1})_{i,j,\alpha,\beta} \times (\gamma_{j,\beta}^{\text{obs}} - \gamma_{j,\beta}^{\text{model}}(p_k)) \quad (7.1)$$

$i, j$  はピクセルの番号を、 $\alpha, \beta$  は各ピクセルでのシアーの 1, 2 成分を表し、それらすべてについて足し合わせる。パラメーターの組が観測データをよく表していると  $\chi^2$  の値は小さくなり、逆に観測データからのずれが大きいと  $\chi^2$  の値は大きくなる。よって、 $\chi^2$  の値が最小となるパラメーターの組合せが最もよく観測データを再現しているといえる。

$N_{i,j,\alpha,\beta}$  はノイズ行列を表している。i 番目のピクセルの  $\alpha$  成分のノイズは、銀河固有の形の歪み成分  $\epsilon_{i,\alpha}$  と大規模構造によって生じるシアー  $\gamma_{i,\alpha}^{\text{cs}}$  の和になる。

$$\text{ノイズ: } N_{i,\alpha} = \gamma_{i,\alpha}^{\text{obs}} - \gamma_{i,\alpha}^{\text{model}} = \epsilon_{i,\alpha} + \gamma_{i,\alpha}^{\text{cs}} \quad (7.2)$$

ノイズ行列は、これの相関を取ったものになる。

$$\begin{aligned}
 N_{i,j,\alpha,\beta} &= \langle N_{i,\alpha} N_{j,\beta} \rangle \\
 &= \langle (\epsilon_{i,\alpha} + \gamma_{i,\alpha}^{\text{CS}})(\epsilon_{j,\beta} + \gamma_{j,\beta}^{\text{CS}}) \rangle \\
 &= \langle \epsilon_{i,\alpha} \epsilon_{j,\beta} \rangle + \langle \gamma_{i,\alpha}^{\text{CS}} \gamma_{j,\beta}^{\text{CS}} \rangle \\
 &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \frac{\sigma_\epsilon^2}{n_g S_i} + C_{\alpha\beta}(|\vec{\theta}_i - \vec{\theta}_j|)
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

右辺1項目で、 $\sigma_\epsilon$  は  $\epsilon$  の分散、 $n_g$  は背景銀河の個数密度、 $S_i$  は  $i$  番目のピクセルの面積を表していて、異なるピクセル間や成分間では相関はないので、 $i, j$  と  $\alpha, \beta$  についてクロネッカーのデルタが現れる。2項目は  $\gamma^{\text{CS}}$  の相関関数で、1項目と違い異なるピクセル間でも値を持つ。具体的には次のようにして計算される。

大規模構造の2次元質量分布  $\kappa^{\text{CS}}$  と  $\gamma^{\text{CS}}$  の2つの成分  $\gamma_1^{\text{CS}}, \gamma_2^{\text{CS}}$  は、ともにポテンシャルの2階微分で表された。

$$\kappa^{\text{CS}}(\vec{\theta}) = \frac{1}{2}(\psi_{,xx} + \psi_{,yy}) \tag{7.4}$$

$$\gamma_1^{\text{CS}}(\vec{\theta}) = \frac{1}{2}(\psi_{,xx} - \psi_{,yy}) \tag{7.5}$$

$$\gamma_2^{\text{CS}}(\vec{\theta}) = \psi_{,xy} \tag{7.6}$$

これをフーリエ変換すると、 $\tilde{\gamma}_1^{\text{CS}}$  と  $\tilde{\gamma}_2^{\text{CS}}$  は  $\tilde{\kappa}^{\text{CS}}$  を用いて表すことができる。

$$\tilde{\kappa}^{\text{CS}}(\vec{l}) = -\frac{1}{2}(l_x^2 + l_y^2)\tilde{\psi} = -\frac{1}{2}l^2\tilde{\psi} \tag{7.7}$$

$$\tilde{\gamma}_1^{\text{CS}} = -\frac{1}{2}(l_x^2 - l_y^2)\tilde{\psi} = \cos(2\varphi_l)\tilde{\kappa}^{\text{CS}} \tag{7.8}$$

$$\tilde{\gamma}_2^{\text{CS}} = -l_x l_y \tilde{\psi} = \sin(2\varphi_l)\tilde{\kappa}^{\text{CS}} \tag{7.9}$$

ここで、 $\varphi_l$  はフーリエ空間での  $\vec{l}$  と  $x$  軸のなす角。よって、 $\gamma_1^{\text{CS}}, \gamma_2^{\text{CS}}$  の2点相関関数は、 $\tilde{\kappa}^{\text{CS}}$  のパワースペクトル  $P_\kappa(l)$  から計算することができる。 $(P_\kappa(l))$  の計算方法は付録Bを

参照)

$$\begin{aligned}
C_{11}(\theta) &= \langle \gamma_1^{\text{CS}} \gamma_1^{\text{CS}} \rangle (\theta) \\
&= \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 l'}{(2\pi)^2} \langle \tilde{\gamma}_1^{\text{CS}} \tilde{\gamma}_1^{\text{CS}} \rangle (l) e^{i\vec{l} \cdot \vec{\theta}_0} e^{-i\vec{l}' \cdot (\vec{\theta}_0 - \vec{\theta})} \\
&= \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 l'}{(2\pi)^2} \cos(2\varphi_l) \cos(2\varphi_{l'}) \\
&\quad \times (2\pi)^2 P_\kappa(l) \delta(\vec{l} - \vec{l}') e^{i\vec{l} \cdot \vec{\theta}_0} e^{-i\vec{l}' \cdot (\vec{\theta}_0 - \vec{\theta})} \\
&= \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} \cos^2(2\varphi_l) P_\kappa(l) e^{i\vec{l} \cdot \vec{\theta}} \\
&= \int \frac{ldl}{2\pi} P_\kappa(l) \int \frac{d\varphi_l}{2\pi} \frac{1 + \cos(4\varphi_l)}{2} e^{il\theta \cos(\varphi_l - \varphi)} \\
&= \int \frac{ldl}{2\pi} P_\kappa(l) \int \frac{d\varphi'}{2\pi} \frac{1 + \cos 4(\varphi' + \varphi)}{2} e^{il\theta \cos(\varphi')}, \quad \varphi' \equiv \varphi_l - \varphi \\
&= \int \frac{ldl}{2\pi} P_\kappa(l) \frac{1}{2} [J_0(l\theta) + J_4(l\theta) \cos(4\varphi)] \tag{7.10}
\end{aligned}$$

$$C_{22}(\theta) = \langle \gamma_2^{\text{CS}} \gamma_2^{\text{CS}} \rangle (\theta) = \int \frac{ldl}{2\pi} P_\kappa(l) \frac{1}{2} [J_0(l\theta) - J_4(l\theta) \cos(4\varphi)] \tag{7.11}$$

$$C_{12}(\theta) = \langle \gamma_1^{\text{CS}} \gamma_2^{\text{CS}} \rangle (\theta) = 0 \tag{7.12}$$

$J_n(x)$  は  $n$  次のベッセル関数。

この論文では、観測されるシアーマップを再現する暗黒物質ハローの質量分布を、前章で見たような NFW ハローをつぶしたモデルで考える。

$$\kappa = 2\kappa_s \times F(\sqrt{1 - e} \sqrt{x^2 + y^2/q^2}/r_s) \tag{6.12}$$

このとき、NFW ハローのビリアル質量  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$ 、中心集中度  $c_{\text{vir}}$ 、天球面上での質量分布 (楕円形) の長軸と短軸の比  $q$ 、データ領域の  $x$  軸とハローの長軸のなす角度  $\varphi$  の 4 つの値をパラメーターとする。しかし、 $\varphi$  の値はこのあと述べるように、初めに円環平均したシアーマップを NFW モデルでフィッティングして求めるので、シアーマップそのものに対しては、 $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$ 、 $c_{\text{vir}}$ 、 $q$  の 3 つのパラメーターでフィッティングする。

$$\begin{aligned}
\chi^2(M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, c_{\text{vir}}, q) &= \sum_{i,j,\alpha,\beta} (\gamma_{i,\alpha}^{\text{obs}} - \gamma_{i,\alpha}^{\text{model}}(M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, c_{\text{vir}}, q)) \times (N^{-1})_{i,j,\alpha,\beta} \\
&\quad \times (\gamma_{j,\beta}^{\text{obs}} - \gamma_{j,\beta}^{\text{model}}(M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, c_{\text{vir}}, q)) \tag{7.13}
\end{aligned}$$

$\chi^2$  の最小値から最もらしいモデルのパラメーター ( $M_{\text{vir}}^{\text{NFW, best-fit}}$ ,  $c_{\text{vir}}^{\text{best-fit}}$ ,  $q^{\text{best-fit}}$ ) が求まるが、そのときのパラメーターの決定誤差は  $\Delta\chi^2$  から見積もることができる。 $\Delta\chi^2(M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, c_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  は、 $\chi^2(M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, c_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  と  $\chi^2$  が最小となるときの値  $\chi^2(M_{\text{vir}}^{\text{NFW, best-fit}}, c_{\text{vir}}^{\text{NFW, best-fit}}, q^{\text{best-fit}})$  との差である。 $\Delta\chi^2$  は 3 次元パラメーター空

間に分布しているが、例えば、 $(q, c)$  などの2次元平面に投影すると、 $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$  の誤差がそれぞれ  $\Delta\chi^2 = 2.3, 6.17, 11.8$  に対応する。よって、 $\Delta\chi^2$  を求めた後  $(c, M)$ 、 $(q, c)$ 、 $(q, M)$  の各平面に  $\Delta\chi^2$  を投影することで  $q, c, M$  の決定精度を求めることができる。

ここまで、 $\gamma$  を使って  $\Delta\chi^2$  を計算し  $q$  を制限する方法を述べてきたが、(3.28) のように  $\gamma$  マップから  $\kappa$  マップを再現することができるので、 $\kappa$  を使って  $\Delta\chi^2$  を計算し  $q$  を制限することもできる。しかし、この論文では  $\kappa$  を使った方法については考えない。その理由は2つある。1つは、直接の観測量は  $\kappa$  ではなく  $\gamma$  であるということ。2つ目は、各ピクセルの  $\gamma$  は互いに独立であるが、あるピクセルの  $\kappa$  は全ピクセルについて  $\gamma$  を積分して求められるので、他のピクセルの  $\kappa$  と独立ではないから。ピクセル間で  $\kappa$  が独立でないと、本来ピクセル間で独立である、背景銀河の固有の歪みがあるピクセルと他のピクセルとで相関を持つてしまう。このような理由から、 $\gamma$  を使う方法で  $\chi^2$  を計算していく。

## 7.2 理論モデル計算

軸比や質量などが典型的な値を持つ、Jing&Suto モデル ( $M_{\text{vir}} = 1.0 \times 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ ,  $c_{\text{vir}} = 4.0$ ,  $a/c = 0.5$ ,  $b/c = 0.7$ 、図 (5.6) を参照) を仮定する。そして、この Jing&Suto モデルを中間の長さを持つ軸 ( $b$  方向) と視線方向 ( $\theta = \pi/2, \phi = \pi/2$ ) が一致するように天球面に投影した場合を考える。天球面上では、Jing&Suto モデルは長軸  $c$ 、短軸  $a$  の楕円形に見えることになる。このとき生じるシアーマップを再現するような、天球面上での質量分布を NFW モデルをつぶしたもの ( $q, c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$ ) として解釈することで求める。ノイズは背景固有の形の歪みのみを考慮し、背景銀河は  $z_s = 1.0$  にあり一様に  $30(\text{arcmin}^{-2})$  の個数密度で分布していて、銀河1つの固有の形の歪みは、 $\sigma_{\epsilon} = 0.2$  であるとした。

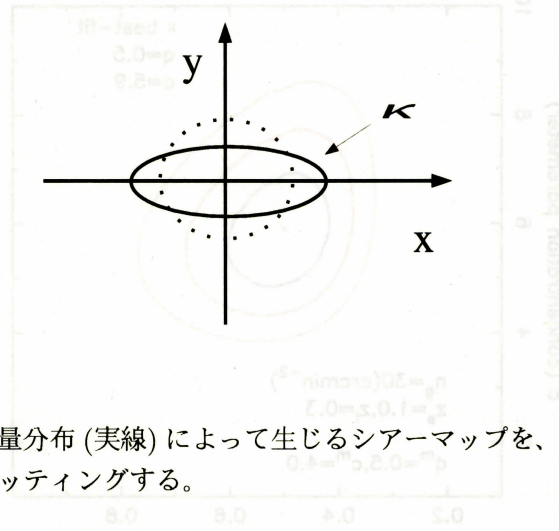


図 7.1  $q = 0.5$  の質量分布 (実線) によって生じるシアーマップを、つぶした NFW モデル (点線) でフィッティングする。

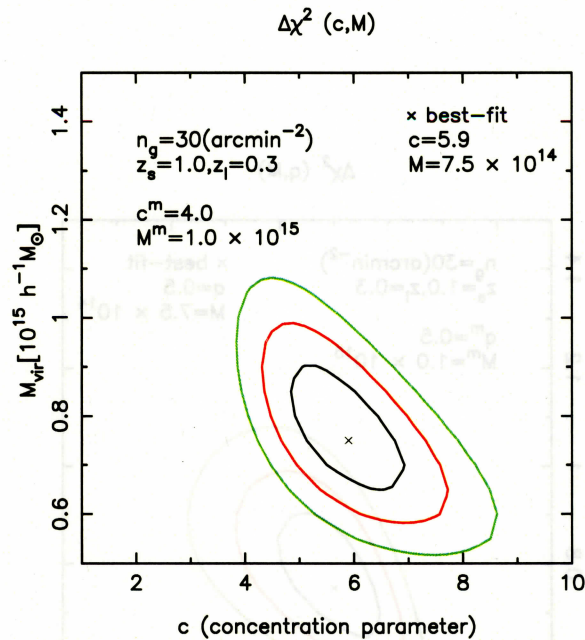


図 7.2 仮定した Jing&Suto モデル ( $a/c=0.5, b/c=0.7$ ) を長軸に沿って天球に投影したものを、つぶした NFW モデルでフィッティングし、求めた  $\Delta\chi^2$  を  $(c, M)$  平面に射影したときの等高線。等高線の値は内側から  $\Delta\chi^2 = 2.3, 6.17, 11.8$  で、それぞれ  $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$  の誤差を表す。背景銀河の個数密度は  $30(\text{arcmin}^{-2})$ 、背景銀河の固有の歪みは  $\sigma_e = 0.2$ 、赤方偏移  $z_s = 1.0$ 。



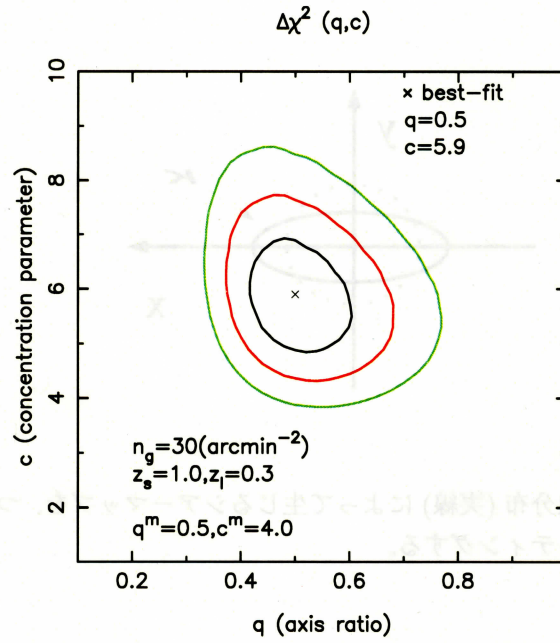


図 7.3 同様にして求めた  $\Delta\chi^2$  を  $(q, c)$  平面で見たときの等高線。

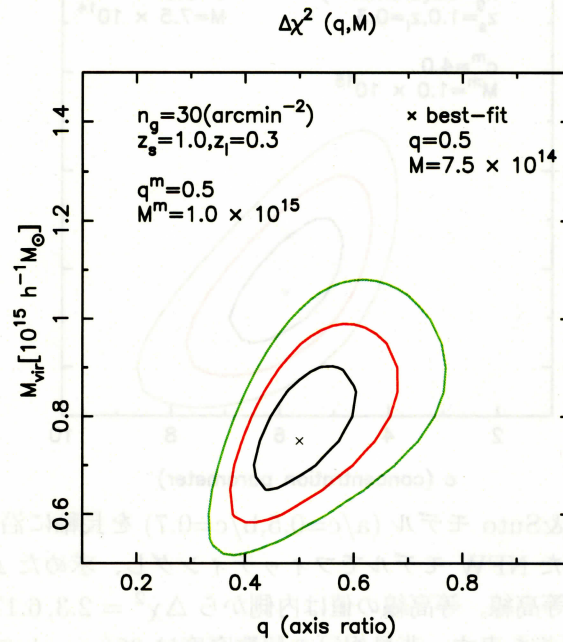


図 7.4 同様にして求めた  $\Delta\chi^2$  を  $(q, M)$  平面で見たときの等高線。

計算の結果、 $\chi^2$  が最小となる時の各パラメーターの値は  $q = 0.5$ ,  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}} = 7.5 \times 10^{14} (h^{-1} M_{\odot})$ ,  $c = 5.9$  と求まった。また、 $q$  は  $1\sigma$  の誤差で  $\pm 0.1$  の精度で決定することができることがわかった。

図 (7.2) を見ると、仮定した Jing&Suto モデルのパラメーターの値と比べて、ビリアル質量は小さめに、中心集中度は大きめに見積もられていることがわかる。この理由は次のように考えられる。フィッティングするつぶした NFW モデルではスケール半径が  $r_s \rightarrow r_s / \sqrt{1-e}$  なので、質量分布が外側に広がり  $r = \sqrt{x^2 + y^2 / q^2}$  での  $\kappa$  の値が大きくなる。したがって、与えられた  $r$  でのシアーの値を表すためには  $c_{\text{vir}}$  を大きくして中心集中度を高くするか  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  を小さくしなければならない。また、図 (7.2) からは、 $c_{\text{vir}}$  が大きいと  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  が小さい傾向が読み取れる。これは、 $c_{\text{vir}}$  が大きいほど中心集中度は高く、 $r$  での  $\kappa$  の値は小さくなってしまうので、この効果を相殺するには  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  を大きくしなければいけないと考えられる。

図 (7.3) を見ると、等高線は円に近いが  $q$  が大きいほど  $c_{\text{vir}}$  は小さいという傾向がわずかにある。さらに、図 (7.4) からは、 $q$  が大きいほど  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  も大きい値をとっている。この理由を長軸に沿った方向で考えると次のようになる。 $q$  が 0.5 より大きい (より円に近い) モデルでフィッティングすると、 $r$  での  $\kappa$  の値は小さくなるので、パラメーターを変化させて  $\kappa$  を大きくするには、 $c_{\text{vir}}$  を小さくして質量分布を広げるか  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  を大きくする必要がある。

次に、ノイズとして考えている背景銀河固有の形の歪みは、ポアソンノイズであることから背景銀河の個数が重要である。そこで、比較のために背景銀河の個数密度を  $10(\text{arcmin}^{-2})$  としたときの、 $\Delta\chi^2$  についても求めた。

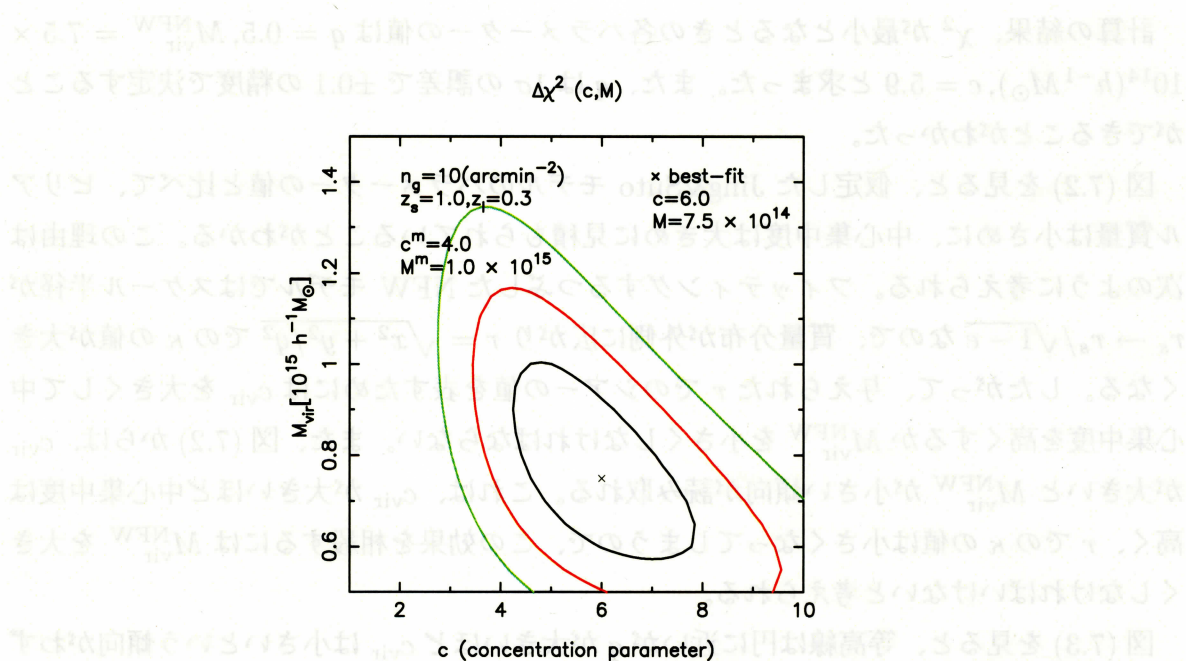


図 7.5 仮定した Jing&Suto モデル ( $a/c=0.5, b/c=0.7$ ) を長軸に沿って天球に投影したものを、つぶした NFW モデルでフィッティングし、求めた  $\Delta\chi^2$  を  $(c, M)$  平面に射影したときの等高線。等高線の値は内側から  $\Delta\chi^2 = 2.3, 6.17, 11.8$  で、それぞれ  $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$  の誤差を表す。背景銀河の個数密度は  $10(\text{arcmin}^{-2})$ 、背景銀河の固有の歪みは  $\sigma_e = 0.2$ 、赤方偏移  $z_s = 1.0$ 。

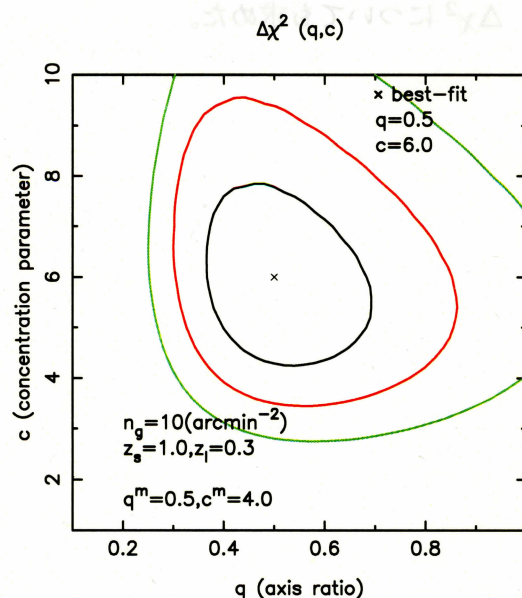


図 7.6 同様にして求めた  $\Delta\chi^2$  を  $(q, c)$  平面に射影したときの等高線。



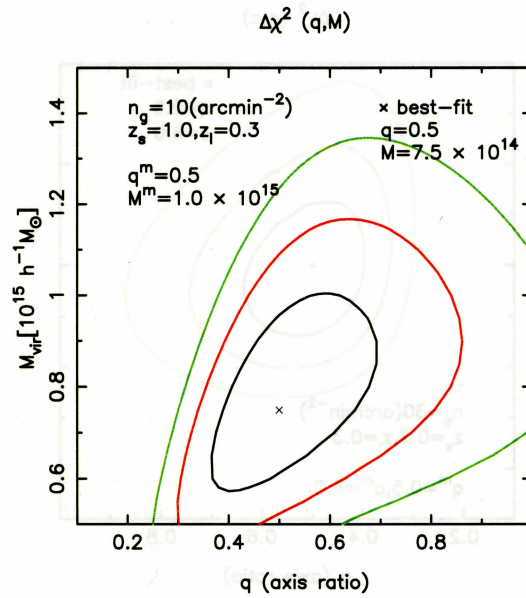


図 7.7 同様にして求めた  $\Delta\chi^2$  を  $(q, M)$  平面に射影したときの等高線。

図 (7.2)～(7.4) と図 (7.5)～(7.7) を比べると明らかなように、背景銀河の数が少ないとノイズが大きくなってしまい、パラメーターの決定精度が悪くなってしまう。

さらに、背景銀河の赤方偏移を  $z_s = 0.7$  として  $\Delta\chi^2$  を求めると次のような結果になった。

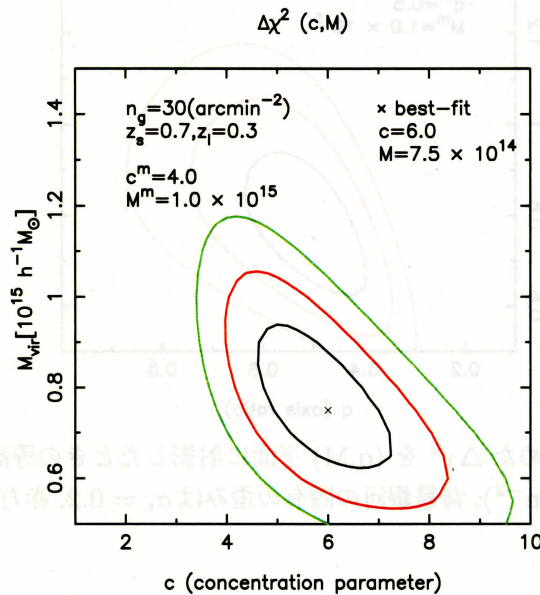


図 7.8 仮定した Jing&Suto モデル ( $a/c=0.5, b/c=0.7$ ) を長軸に沿って天球に投影したものを、つぶした NFW モデルでフィッティングし、求めた  $\Delta\chi^2$  を  $(c, M)$  平面に射影したときの等高線。等高線の値は内側から  $\Delta\chi^2 = 2.3, 6.17, 11.8$  で、それぞれ  $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$  の誤差を表す。背景銀河の個数密度は  $30(\text{arcmin}^{-2})$ 、背景銀河の固有の歪みは  $\sigma_e = 0.2$ 、赤方偏移  $z_s = 0.7$ 。

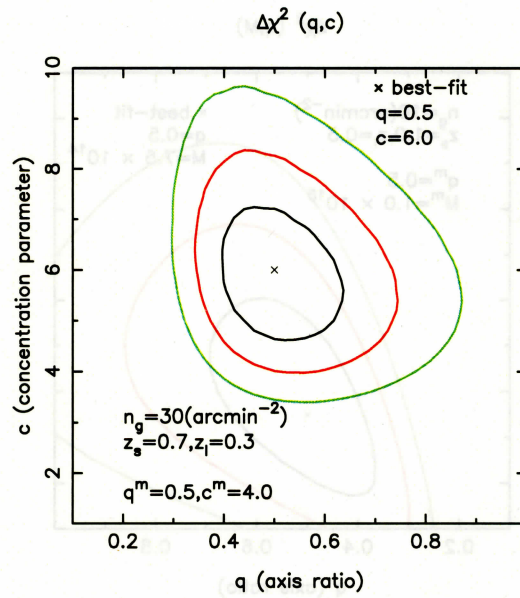


図 7.9 同様にして求めた  $\Delta\chi^2$  を  $(q, c)$  平面に射影したときの等高線。背景銀河の個数密度は  $30(\text{arcmin}^{-2})$ 、背景銀河の固有の歪みは  $\sigma_\epsilon = 0.2$ 、赤方偏移  $z_s = 0.7$ 。

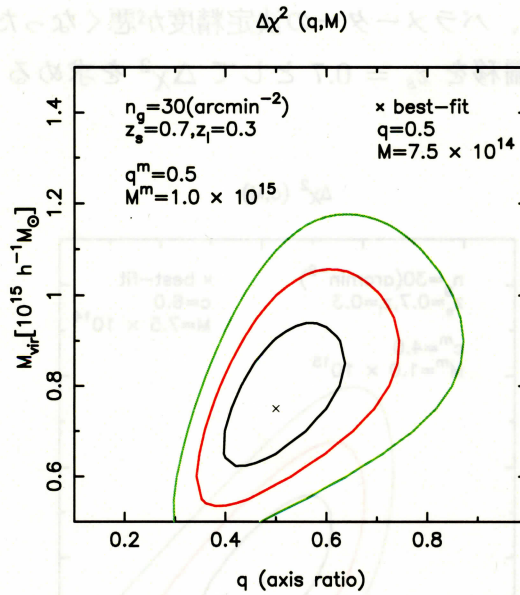


図 7.10 同様にして求めた  $\Delta\chi^2$  を  $(q, M)$  平面に射影したときの等高線。背景銀河の個数密度は  $30(\text{arcmin}^{-2})$ 、背景銀河の固有の歪みは  $\sigma_\epsilon = 0.2$ 、赤方偏移  $z_s = 0.7$ 。



(7.2)~(7.4) と (7.8)~(7.10) を比較すると、わずかに等高線によって囲まれた領域が広がっている。これは、弱い重力レンズによって生じるシアアの信号が  $z_s = 1 \rightarrow z_s = 0.7$  とすることで弱まり、誤差が大きくなったためと考えられる。しかし、背景銀河の個数を  $30(\text{arcmin}^{-2}) \rightarrow 10(\text{arcmin}^{-2})$  としたときの誤差の比べると、その変化は小さいといえる。

### 7.3 観測データへの適用

ここからは、実際の観測データを使って対象となる銀河団の  $q$  を制限することを考えていく。扱うデータは、銀河団 Abell1689 によって生じた  $g$  ( $g_1 \equiv \gamma_1/(1 - \kappa)$ ,  $g_2 \equiv \gamma_2/(1 - \kappa)$ ) である。図 (7.11)(Umetsu&Broadhurst,2007[18]) は、シアーマップから再現された 2 次元質量分布 ( $\kappa$ ) の等高線を表している。この図からは、銀河団 Abell1689 の天球面上での質量分布が比較的丸いことがわかる。ノイズ ( $\sigma_e^2$ ) は、個々の銀河の固有の形の歪みだけを考慮した。このとき、背景銀河として、5728 個の銀河 (赤い銀河) の場合と 32954 個の銀河 (赤い銀河 + 青い銀河) の場合を解析した。赤い銀河だけのデータを使った場合、銀河の色が赤いことからそれらはレンズ天体よりも遠方にあると考えられるが、データの数が少ないので誤差が大きいと予想される。一方、赤い銀河 + 青い銀河のデータの場合は、データ数が多いので誤差は赤い銀河だけのデータよりも小さくなると考えられるが、青い銀河はレンズ天体を構成している銀河である可能性もある。



図 7.11 銀河団 1689 の質量分布 ( $\kappa$ ) の等高線。Umetsu&Broadhurst(2007)[18] の fig.7。

解析を行うとき、観測データはそのまま使うことはせず、次のように計算した平均値を用いる。まず、データが存在する平面を、解析目的にしたがっていくつかの円環やピクセ

ルに分割する。 $i$  番目の円環やピクセルにデータ点が含まれる場合は、含まれる背景銀河の歪み (reduced shear) やノイズ (背景銀河固有の歪み) を下のように平均する。

$$\text{reduced shear : } \langle g_\beta \rangle_i = \frac{\sum g_{\beta,j} W_j}{\sum W_j}, \quad W_j = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \sigma_{\epsilon,j}^2} \quad (7.14)$$

$$\text{ノイズ : } \sigma_i^2 = \frac{\langle \sigma_\epsilon^2 \rangle_i}{\sum W_i}, \quad \langle \sigma_\epsilon^2 \rangle_i = \frac{\sum W_j \sigma_{\epsilon,j}^2}{\sum W_j} \quad (7.15)$$

ここで、和は各円環やピクセル内の背景銀河についてとる。 $\beta = 1, 2$  は、shear の 1, 2 成分 ( $g_1, g_2$ ) を表す。また、 $\alpha = 0.4$  とした。 $W_j$  は、 $\alpha \gg \sigma_{\epsilon,j}$  のとき  $\sim 1$ 、 $\alpha \ll \sigma_{\epsilon,j}$  のとき  $\sim 0$  なので、これを重みとして平均を求めることは比較的丸い背景銀河を選択することを意味している。もし、円環やピクセルの中に銀河が含まれないならば、 $g$  は 0 とする。

### 7.3.1 結果 (背景銀河:赤い銀河のみ)

初めに、Abell1689 のおよそのビリアル質量と中心集中度を求める。データの領域をいくつかの円環に分けて  $g_t$  を円周平均し、それを NFW モデル ( $c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$ ) でフィッティングする。

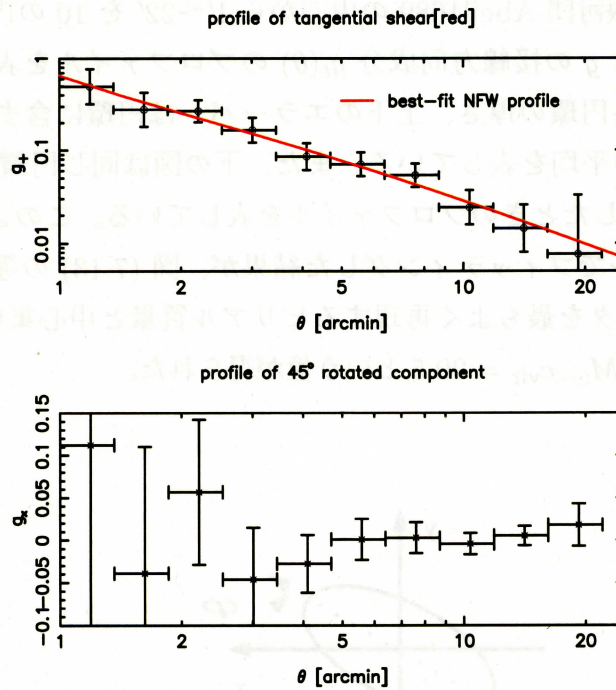


図 7.12 上の図は、 $g$  の接線方向の成分  $g_t$  を円環内で平均したプロファイル。縦軸方向の誤差は、円環内にある背景銀河の固有の歪みの平均。横軸方向の誤差は、円環の厚さを表している。実線は、最もデータを再現するパラメーター ( $c_{\text{vir}} = 20.5$ ,  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}} = 9.5 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$ ) のときのプロファイル。下の図は、 $g_t$  を 45 度回転させた、成分  $g_{\times}$  を円周平均したプロファイル。

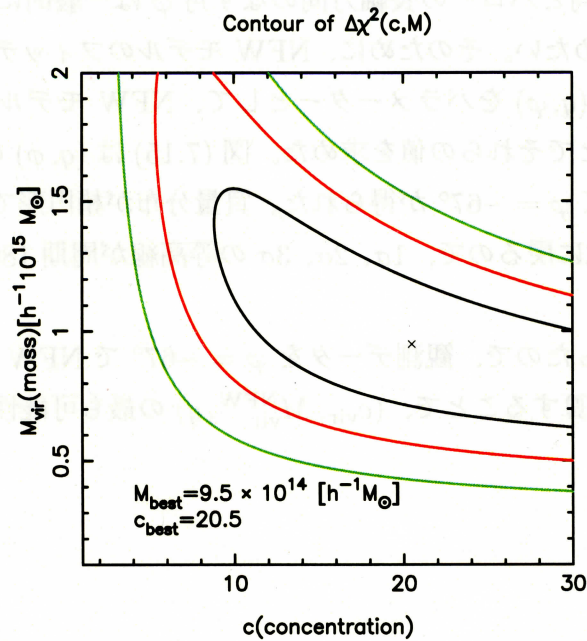


図 7.13 図 (7.12) の  $g_t$  のプロファイルを、球対称ハローモデルでフィッティングしたときの等高線。ノイズは個々の銀河の固有の歪みを考慮し、光源はすべて  $z_s = 1$  にあるとした。



図 7.12 の上の図は、銀河団 Abell1689 の中心から  $1' \sim 22'$  を 10 の円環に分割し、それぞれの円環で平均した  $g$  の接線方向成分  $g_t(\theta)$  のプロファイルを表す。データ点での左右のエラーバーは各円環の厚さ、上下のエラーバーは円環に含まれる銀河固有の形の歪みによるノイズの平均を表している。また、下の図は同じ円環で  $g_t$  を 45 度回転させた成分  $g_x$  を平均したときのプロファイルを表している。このような  $g_t(\theta)$  プロファイルを NFW モデルでフィッティングした結果が、図 (7.13) の等高線マップである。この計算から、データを最もよく再現するビリアル質量と中心集中度の値として、 $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}} = 9.5 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$ ,  $c_{\text{vir}} = 20.5$  という値が得られた。

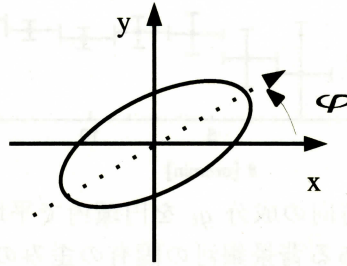


図 7.14 データの x 軸と天球に投影された halo の長軸のなす角  $\varphi$  は、必ずしも一致していない。

次に、データの x 軸方向とハローの長軸方向のなす角  $\varphi$  は一般的に一致していないので (図 7.14)、 $\varphi$  の値を決めたい。そのために、NFW モデルのフィッティングで得られた  $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}})$  を固定し、 $(q, \varphi)$  をパラメーターとして、NFW モデルをつぶしたモデルでフィッティングすることでそれらの値を求めた。図 (7.15) は  $(q, \varphi)$  の等高線マップで、最も可能性の高い値として  $\varphi = -67^\circ$  が得られた。質量分布が楕円形であるとする、それは  $180^\circ$  回転させると元に戻る、 $1\sigma$ ,  $2\sigma$ ,  $3\sigma$  の等高線が周期  $180^\circ$  の曲線になっていると考えられる。

$\varphi$  の値が  $-67^\circ$  と求まったので、観測データを  $\varphi = -67^\circ$  で NFW モデルをつぶしたものと解釈して  $\Delta\chi^2$  を計算することで、 $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  の最も可能性の高い値と決定誤差を求める。

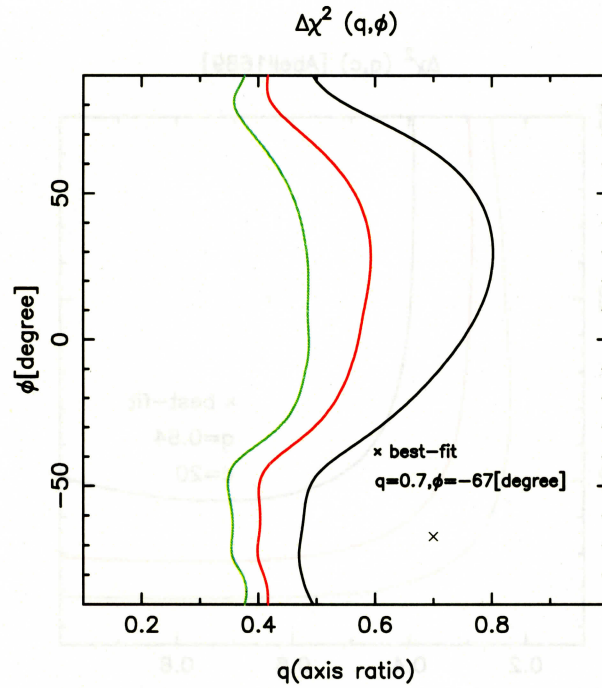


図 7.15 NFW モデルのフィッティングで得られた  $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}})$  を固定し、 $(q, \phi)$  をパラメータとして、NFW モデルをつぶしたモデルでフィッティングしたときの等高線。最もよくデータを再現する値は  $q = 0.7, \phi = -67^\circ$ 。

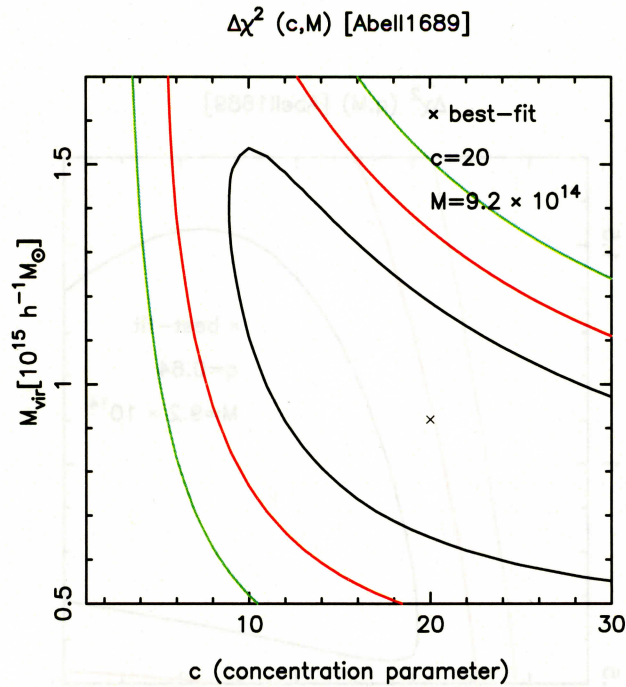


図 7.16 銀河団 Abell1689 を、NFW モデルをつぶしたものとして解釈したときの、 $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  の  $\Delta\chi^2$  を計算し、 $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}})$  平面に投影したときの等高線。背景銀河は赤い銀河のみ。等高線の値は内側から  $\Delta\chi^2 = 2.3, 6.17, 11.8$  で、それぞれ  $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$  の誤差に対応している。 $c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  の最もよくデータを再現する値は  $c = 20, M = 9.2 \times 10^{14} M_\odot$ 。

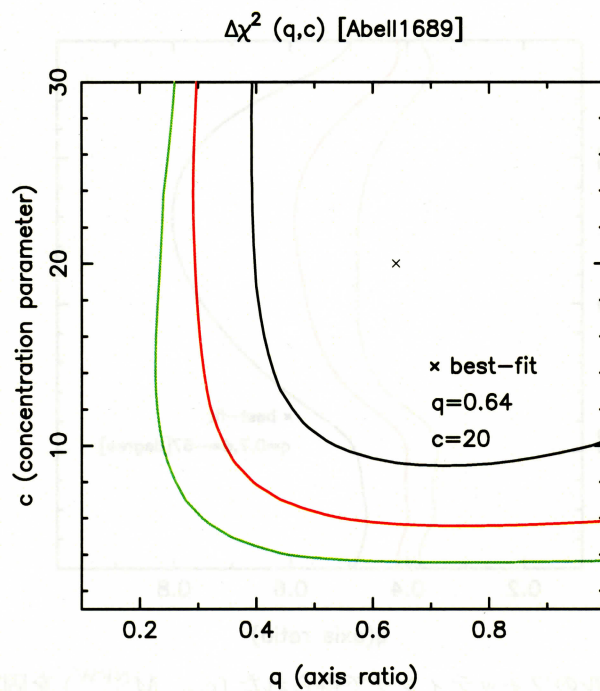


図 7.17  $\Delta\chi^2(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  を計算し、 $(q, c_{\text{vir}})$  平面に投影したときの等高線。  
 $q, c_{\text{vir}}$  の最もよくデータを再現する値は  $q = 0.64, c_{\text{vir}} = 20$ 。

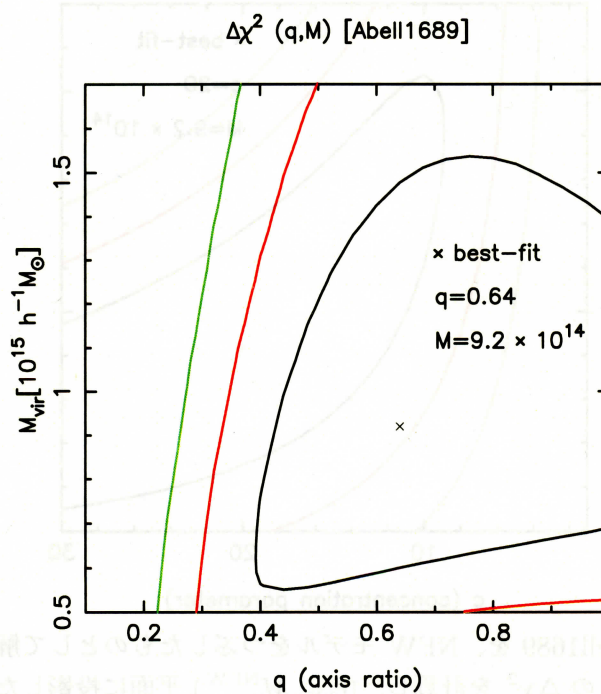


図 7.18  $\Delta\chi^2(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  を計算し、 $(q, M_{\text{NFW}})$  平面に投影したときの等高線。  
 $q, M_{\text{vir}}$  の最もよくデータを再現する値は  $q = 0.64, M_{\text{vir}} = 9.2 \times 10^{14} M_{\odot}$ 。



図 (7.16) から (7.18) は、求めた  $\Delta\chi^2(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  を  $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}})$ 、 $(q, c_{\text{vir}})$ 、 $(q, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}})$  平面に投影したときの、 $\Delta\chi^2 = 2.3, 6.17, 11.8$  の等高線と最もよくデータを再現する値を示している。図 (7.17) と (7.18) からわかるように、銀河団 Abell1689 の天球面に投影されたときの軸比は、 $1\sigma$  の誤差の範囲で  $q = 0.64^{+0.36}_{-0.24}$  と決めることができる。しかし、 $q = 11\sigma$  の誤差の範囲に含まれるので、球対称 NFW モデルは棄却されない。誤差を理論モデル計算 ( $n_g = 30(\text{arcmin}^{-2})$ ) の結果 ( $\pm 0.1$ ) と比較すると、3 倍ほど大きいことがわかる。ここで、データの背景銀河の数密度を求めてみる。データは (7.14)、(7.15) のように各ピクセル内で平均しているので、

$$N_g^{\text{eff}} = \sum_j \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \sigma_{\epsilon,j}^2} \quad (7.16)$$

$j$  はそれぞれのデータについての和

をデータ数とみなす。銀河団の中心を原点とし、 $-10' < x < 10'$ 、 $-10' < y < 10'$  に存在しているデータ数の和をとり数密度を求めると、 $\sim 4(\text{arcmin}^{-2})$  であった。このことから、 $q$  の誤差が理論モデル計算よりも大きいのは、背景銀河の数が少なく、銀河固有の形の歪みによるノイズが大きいためと考えられる。

### 7.3.2 結果 (背景銀河:赤い銀河 + 青い銀河)

32954 個の赤い銀河 + 青い銀河のデータについても、同様にして  $q$  の値を求めた。まず、 $1' \sim 22'$  の領域を円環状に 10 分割し、それぞれの円環での  $g_t$  の平均をプロットすると図 (7.19) が得られた。このプロファイルに  $(q, \varphi)$  をパラメーターとして NFW モデルをフィッティングすると、 $g_t$  のプロファイルを最もよく再現する  $\varphi$  の値は  $\varphi = -81^\circ$  であることがわかった。そこで、 $\varphi = -81^\circ$  に固定し、観測データをつぶした NFW モデル  $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  でフィッティングすることでパラメーターの値とその決定誤差を求めた。

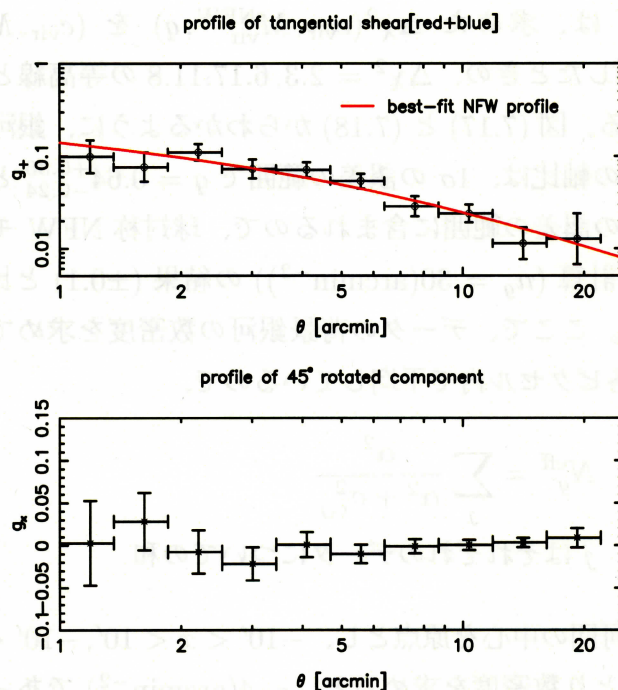


図 7.19 上の図は、 $g$  の接線方向の成分  $g_t$  を円環内で平均したプロファイル。縦軸方向の誤差は、円環内にある背景銀河の固有の歪みの平均。横軸方向の誤差は、円環の厚さを表している。実線は、最もよくデータを再現するパラメーター ( $c_{\text{vir}} = 5.3$ ,  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}} = 9.7 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$ ) のときのプロファイル。下の図は、 $g_t$  を 45 度回転させた、成分  $g_x$  を円周平均したプロファイル。

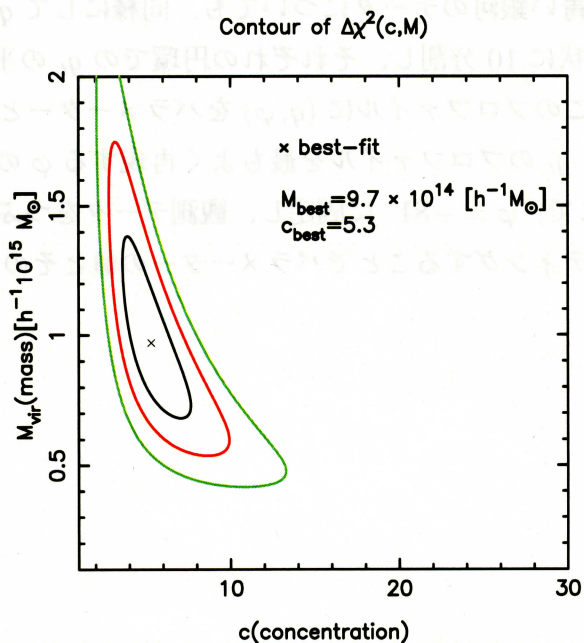


図 7.20 図 (7.19) の  $g_t$  のプロファイルを、球対称ハローモデルでフィッティングしたときの等高線。ノイズは個々の銀河の固有の歪みを考慮し、光源はすべて  $z_s = 1$  にあるとした。

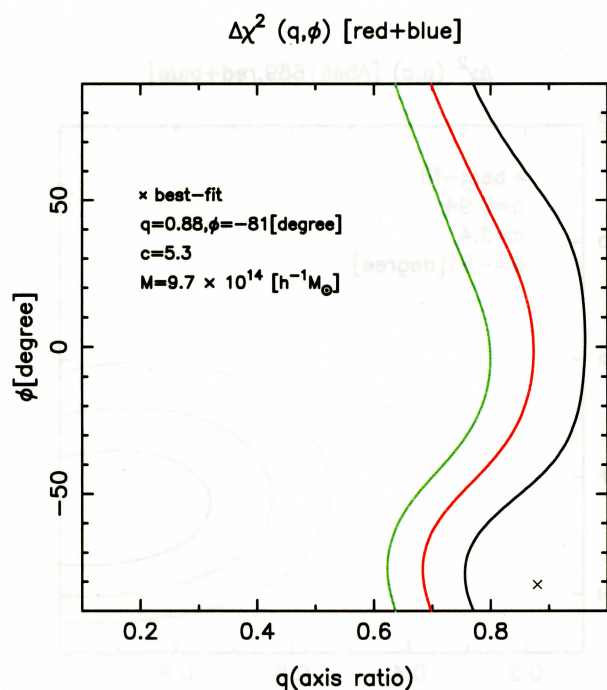


図 7.21 NFW モデルのフィッティングで得られた  $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}})$  を固定し、 $(q, \varphi)$  をパラメーターとして、NFW モデルをつぶしたモデルでフィッティングしたときの等高線。最もよくデータを再現する値は  $q = 0.88, \varphi = -81^\circ$ 。

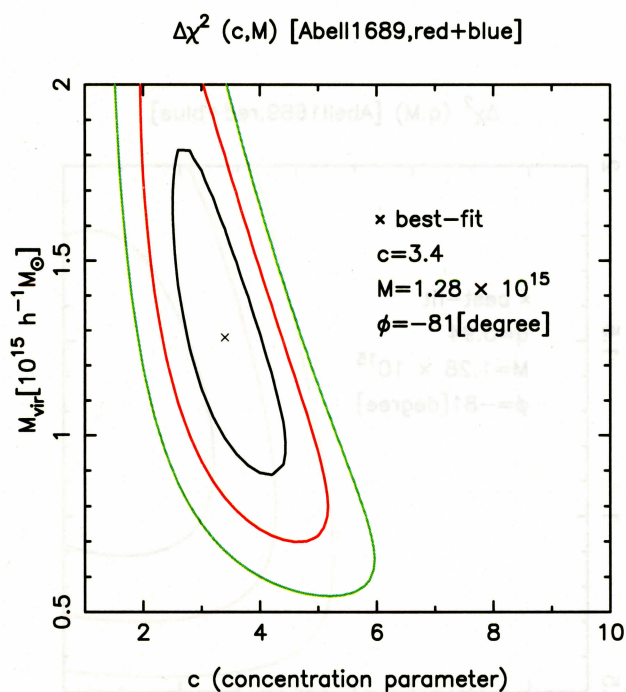


図 7.22 銀河団 Abell1689 を、NFW モデルをつぶしたものの  $(\varphi = -81^\circ)$  として解釈したときの、 $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  の  $\Delta\chi^2$  を計算し、 $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}})$  平面に投影したときの等高線。背景銀河は赤い銀河 + 青い銀河。等高線の値は内側から  $\Delta\chi^2 = 2.3, 6.17, 11.8$  で、それぞれ  $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$  の誤差に対応している。 $c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  の最もよくデータを再現する値は  $c = 3.4, M = 1.28 \times 10^{15} M_\odot$ 。



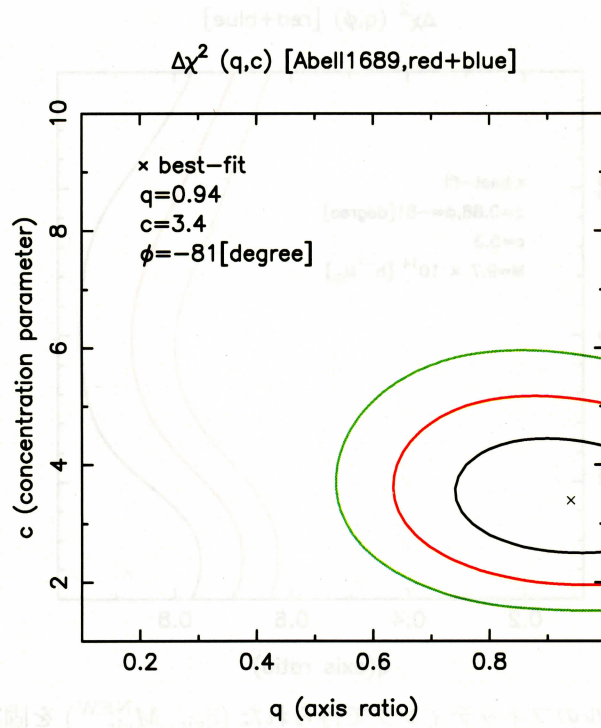


図 7.23  $\Delta\chi^2(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  を計算し、 $(q, c_{\text{vir}})$  平面に投影したときの等高線。  
 $q, c_{\text{vir}}$  の最もよくデータを再現する値は  $q = 0.94, c_{\text{vir}} = 3.4$ 。

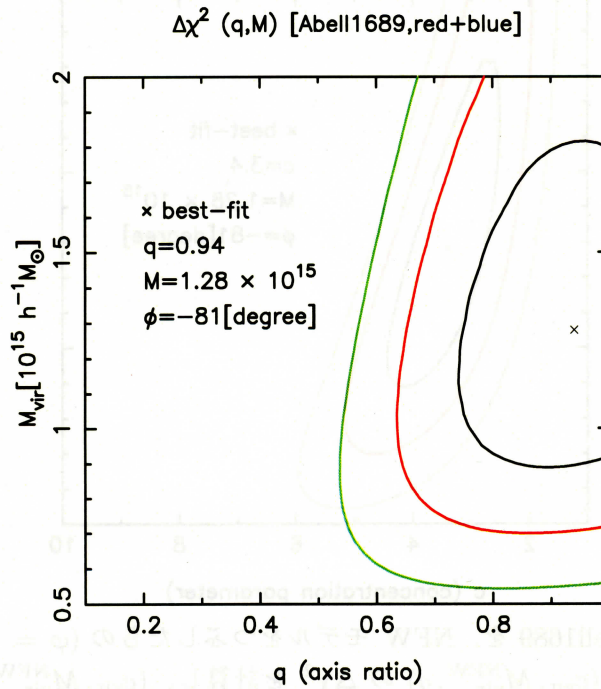


図 7.24  $\Delta\chi^2(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  を計算し、 $(q, M_{\text{NFW}})$  平面に投影したときの等高線。  
 $q, M_{\text{vir}}$  の最もよくデータを再現する値は  $q = 0.94, M_{\text{vir}} = 1.28 \times 10^{15} M_{\odot}$ 。

図 (7.23) または (7.24) から、最もデータを再現する  $q$  の値と  $1\sigma$  の誤差はおよそ  $q = 0.94^{+0.06}_{-0.21}$ 、中心集中度はおよそ  $c = 3.4 \pm 1$  であることがわかる。これらの結果を赤い銀河だけのデータの場合と比べると、特に中心集中度について誤差が小さくなっていることがわかる。赤い銀河 + 青い銀河の数密度を (7.16) のように計算すると、 $\sim 23(\text{arcmin}^{-2})$  であった。したがって、銀河の個数密度が大きいデータを使ったので、背景銀河固有の形の歪みによるノイズが小さくなったと考えられる。一方、ビリアル質量の誤差は2つのデータによる結果にあまり違いはない。また、このデータの場合も  $q = 1$  は  $1\sigma$  の誤差の範囲に含まれるので、球対称 NFW モデルを棄却することはできない。

次に、 $\varphi$  の値を変化させたときに最も観測データを再現する  $q$  の値がどの程度変わるのかを調べるために、 $\varphi = -50^\circ, 50^\circ$  としたときの  $\chi^2$  も計算した。

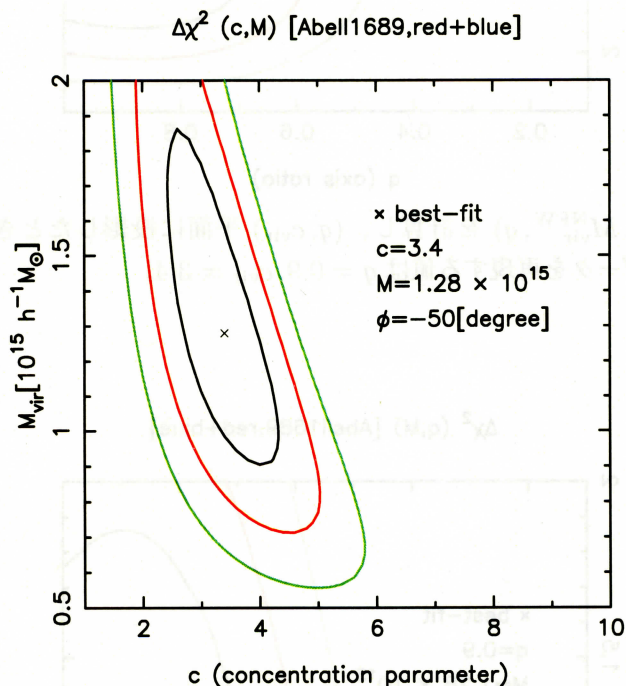


図 7.25 銀河団 Abell1689 を、NFW モデルをつぶしたものの ( $\varphi = -50^\circ$ ) として解釈したときの、 $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  の  $\Delta\chi^2$  を計算し、 $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}})$  平面に投影したときの等高線。背景銀河は赤い銀河 + 青い銀河。等高線の値は内側から  $\Delta\chi^2 = 2.3, 6.17, 11.8$  で、それぞれ  $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$  の誤差に対応している。 $c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  の最もよくデータを再現する値は  $c = 3.4, M = 1.28 \times 10^{15} M_\odot$ 。



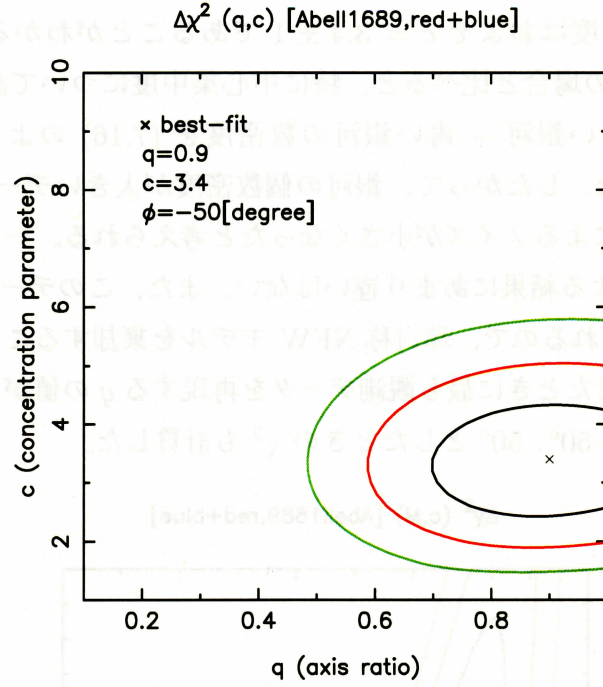


図 7.26  $\Delta\chi^2(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  を計算し、 $(q, c_{\text{vir}})$  平面に投影したときの等高線。  
 $q, c_{\text{vir}}$  の最もよくデータを再現する値は  $q = 0.9, c_{\text{vir}} = 3.4$ 。

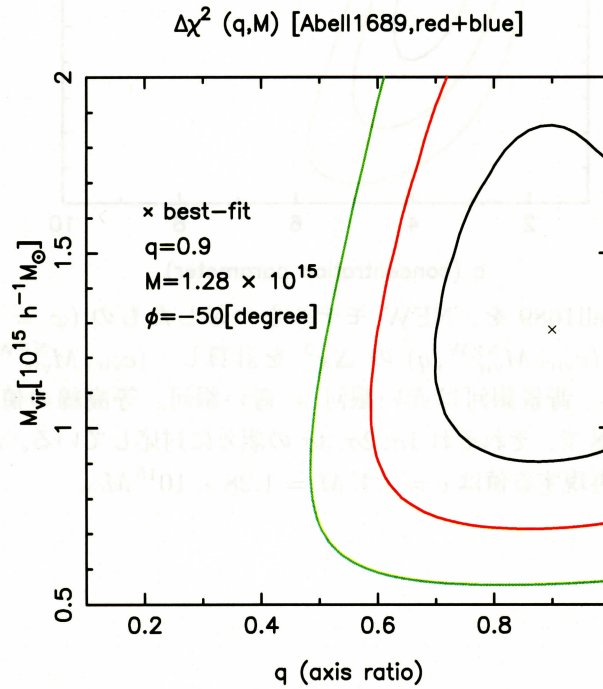


図 7.27  $\Delta\chi^2(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  を計算し、 $(q, M_{\text{NFW}})$  平面に投影したときの等高線。  
 $q, M_{\text{vir}}$  の最もよくデータを再現する値は  $q = 0.9, M_{\text{vir}} = 1.28 \times 10^{15} M_{\odot}$ 。

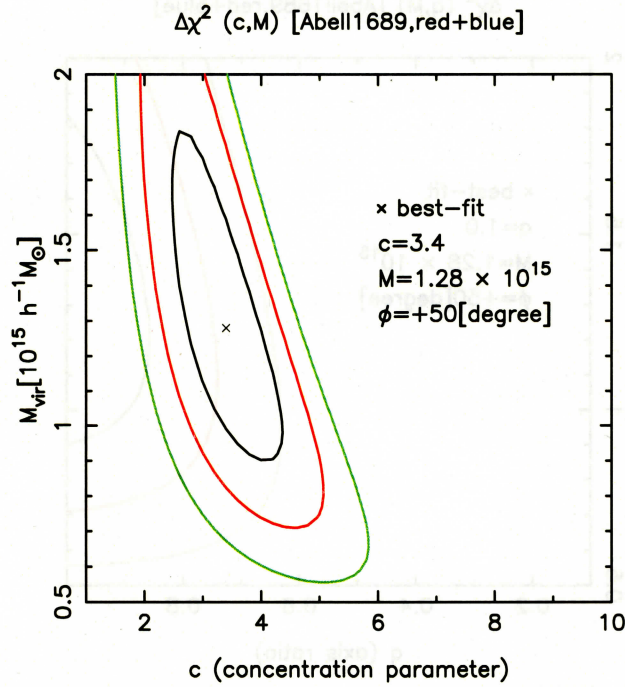


図 7.28 銀河団 Abell1689 を、NFW モデルをつぶしたものの ( $\phi = +50^\circ$ ) として解釈したときの、 $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  の  $\Delta\chi^2$  を計算し、 $(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}})$  平面に投影したときの等高線。背景銀河は赤い銀河 + 青い銀河。等高線の値は内側から  $\Delta\chi^2 = 2.3, 6.17, 11.8$  で、それぞれ  $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$  の誤差に対応している。 $c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  の最もよくデータを再現する値は  $c = 3.4, M = 1.28 \times 10^{15} M_\odot$ 。

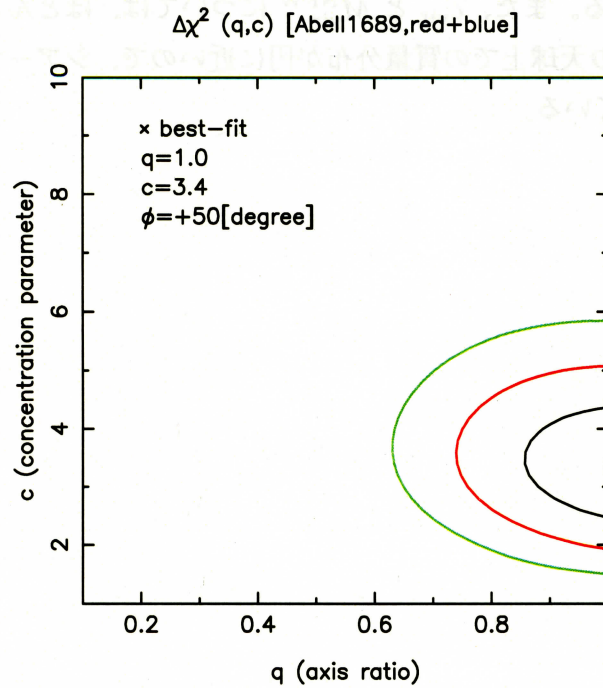


図 7.29  $\Delta\chi^2(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  を計算し、 $(q, c_{\text{vir}})$  平面に投影したときの等高線。 $q, c_{\text{vir}}$  の最もよくデータを再現する値は  $q = 1.0, c_{\text{vir}} = 3.4$ 。

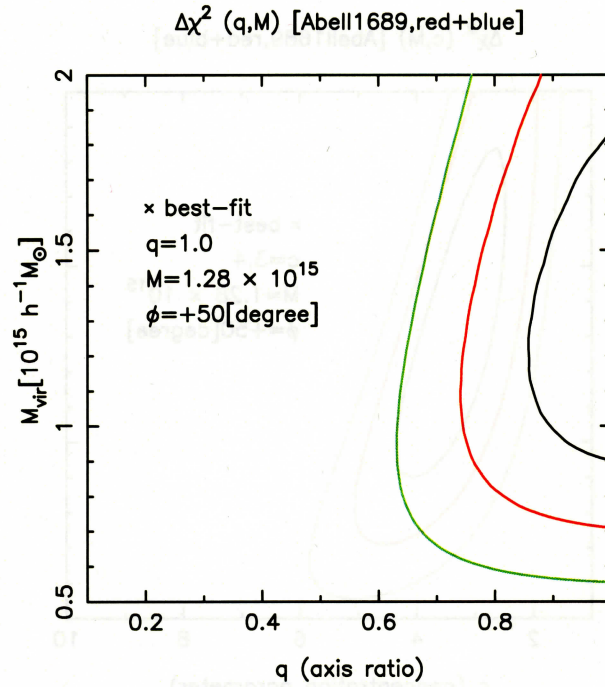


図 7.30  $\Delta\chi^2(c_{\text{vir}}, M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}, q)$  を計算し、 $(q, M_{\text{NFW}})$  平面に投影したときの等高線。  
 $q, M_{\text{vir}}$  の最もよくデータを再現する値は  $q = 1.0, M_{\text{vir}} = 1.28 \times 10^{15} M_{\odot}$

図 (7.25)~(7.30) から明らかなように、観測データを最もよく再現する  $q$  の値は、 $\varphi = -50^\circ$  のとき  $q = 0.9$ 、 $\varphi = +50^\circ$  のとき  $q = 1.0$  で、 $\varphi = -81^\circ$  のときと比べてその差はおよそ 4%~6% である。また、 $c_{\text{vir}}$  と  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$  については、ほとんど変化がない。これは、銀河団 Abell1689 の天球上での質量分布が円に近いので、シアーマップがほとんど  $\varphi$  によらないことを示している。

## 第 8 章

### 議論

この論文では、銀河団に付随する暗黒物質ハローの天球面上での形状を、弱い重力レンズの観測データによって制限する方法についてまとめた。

シミュレーション結果から、銀河、銀河群、銀河団といった構造のスケールに関係なく、それらに付随する暗黒物質ハローは 3 軸不等な楕円体をしていることがわかっていて、天球面に投影すると楕円形の質量分布を持つように見える。この暗黒物質ハローを、ピリアル質量  $M_{\text{vir}}^{\text{NFW}}$ 、中心集中度  $c_{\text{vir}}$ 、楕円形の長軸と短軸の比  $q$ 、データ領域の  $x$  軸と天球面に投影されたハローの長軸がなす角  $\varphi$  の 4 つをパラメーターとし、球対称な暗黒物質ハローをつぶしたものとして解釈することで、弱い重力レンズ効果のデータから  $q$  を制限することができるか調べた。

$q$  を制限する方法としては、 $\kappa$  の 1 階積分でシアを計算できる Keeton(2001) を修正することを考えた。Keeton(2001) は、NFW モデルを 1 方向からだけつぶして他の方向の軸の長さは固定したハローによって生じるシアを計算する方法を与えている。そこで、Keeton(2001) の計算式を、NFW モデルをある方向からつぶしたときにもう 1 方向に広がるように変形した方法を考えた。

まず初めに理論計算として、3 軸不等な暗黒物質ハローの正しい記述方法である Oguri et al.(2003) の式を用いて、仮定した暗黒物質ハローの  $q$  の決定誤差を計算した。すると、 $q = 0.5$  のハローに対して背景銀河の個数密度が  $n_g = 30(\text{arcmin}^{-2})$ 、背景銀河固有の形の歪みが  $\sigma_e = 0.2$  という条件の下では、 $1\sigma$  の信頼度で  $\pm 0.1$  の誤差で  $q$  を決めることができるという結果が得られた。また、背景銀河の個数密度を  $n_g = 10(\text{arcmin}^{-2})$  したときや、赤方偏移を  $z_s = 0.7$  としたときに  $q$  の誤差がどのように変わるのかについても調べた。その結果、いずれの場合も  $q$  の誤差は大きくなったが、 $n_g = 30(\text{arcmin}^{-2}) \rightarrow 10(\text{arcmin}^{-2})$  としたときのほうが、誤差の変化が顕著となることがわかった。

次に、銀河団 Abell1689 の重力レンズのデータにフィッティングすることで  $q$  と  $q$  の決定誤差を求めた。このとき、背景銀河が赤い銀河のみのものと、赤い銀河 + 青い銀河

のもの2つについて調べた。すると、前者のデータを解析した場合  $1\sigma$  の誤差の範囲で  $q = 0.64^{+0.36}_{-0.24}$  となったが、後者のデータを解析すると  $1\sigma$  の誤差の範囲で  $q = 0.94^{+0.06}_{-0.21}$  という結果が得られた。後者の解析結果の方が誤差が小さいが、これは、前者のデータの数密度が  $\sim 4(\text{arcmin}^{-2})$  であるのに対して、後者は  $\sim 23(\text{arcmin}^{-2})$  であり、背景銀河固有の形に由来するノイズが小さくなったためである。一方、銀河団 Abell1689 の解析では、ノイズとして背景銀河固有の歪みのみを考慮した。しかし、この他にもノイズとして宇宙の大規模構造による重力レンズ効果がある。このノイズ、は各ピクセル間で独立ではなく相関がある。大規模構造による重力レンズ効果を適切に評価して解析すれば、より誤差を小さくして  $q$  を求めることができると考えられる。

この論文では1つの銀河団についてだけ  $q$  を求めたが、冷たい暗黒物質が支配的な構造形成モデルを検証するためには、多くの銀河団の  $q$  の値が必要となる。したがって、今後様々な銀河団の観測データを解析していくことが課題となる。

## 付録 A

# レンズ方程式の導出

3章では幾何学的な考察からレンズ方程式を導いたが、ここでは、光子の測地線方程式  
レンズ方程式を導出する方法をまとめる。

曲率を持った空間を光子が運動するとき、どのような軌道を運動するかは測地線方程式  
によって理解することができる。測地線方程式は、ユークリッド空間において外部から力  
が加わっていないときの運動方程式に対応している。例えば、2次元ユークリッド空間に  
おける運動方程式をデカルト座標系で表すと、

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0, \quad (i = 1, 2 \quad x^1 = x, x^2 = y) \quad (\text{A.1})$$

となる。これを、曲率を持った空間の方程式に一般化すると、

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (\text{A.2})$$

となる。ここで、 $\mu$  などのギリシャ文字は  $\mu = 0, 1, 2, 3$  の値を示し、4次元時空で  $x^0$  は  
時間成分、 $x^{1,2,3} \equiv x^i$  は空間成分を表す。 $\lambda$  は光子が運動する経路を特徴づけるパラメー  
ターであり、経路に沿って単調に増加する。また、 $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  はクリストッフェル記号で、メト  
リック  $g_{\mu\nu}$  から

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left[ \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right] \quad (\text{A.3})$$

と計算することができる。

今、弱い重力場が存在している領域を光子が通過する状況を考える。このときのメト  
リックは、重力ポテンシャルを  $\phi$  として次のように与えられる。

$$ds^2 = a(\eta)^2 d\tilde{s}^2 = a(\eta)^2 \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.4})$$

$$d\tilde{s}^2 = -(1 + 2\phi)d\eta^2 + (1 - 2\phi)[d\chi^2 + f_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (\text{A.5})$$



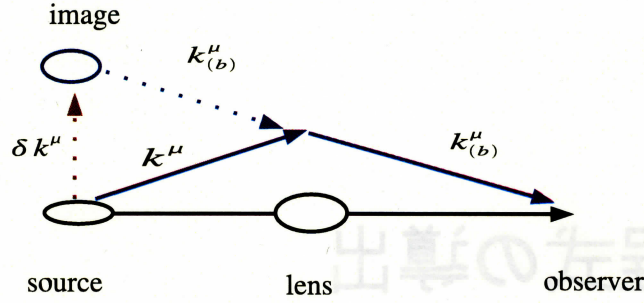


図 A.1 重力レンズと波数ベクトル

光子の波数ベクトルを  $dx^\mu/d\lambda = k^\mu$  とすると、測地線方程式は

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu k^\alpha k^\beta = 0, \quad k^\mu k_\mu = 0 \quad (\text{A.6})$$

と書ける。波数ベクトル  $k^\mu$  は、バックグラウンドの波数ベクトルとその摂動部分に別けることができる。

$$k^\mu = k_{(b)}^\mu + \delta k^\mu \quad (\text{A.7})$$

background の光子の軌道と波数ベクトルは、 $(\eta, \chi, \theta, \varphi)$  という座標系では

$$k_{(b)}^\mu = (-1, 1, 0, 0), \quad x_{(b)}^\mu = (\lambda_0 - \lambda, \lambda, \theta_I, 0) \quad (\text{A.8})$$

と表される。ここで、 $\theta_I$  はレンズ天体とイメージの天球上での角度、 $\lambda_0$  は観測者の位置でのアフィンパラメーターを表す。また、 $f_K(\chi)$  はアフィンパラメーターによって  $f_K(\chi(\lambda)) = F_K(\lambda_0^\lambda)$  と書ける。

(A.7) を (A.6) に代入すると、測地線方程式の摂動部分が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} (k_{(b)}^\mu + \delta k^\mu) + (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu) (k_{(b)}^\alpha + \delta k^\alpha) (k_{(b)}^\beta + \delta k^\beta) = 0 \\ & \underbrace{\frac{dk_{(b)}^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu k_{(b)}^\alpha k_{(b)}^\beta}_{=0} + \frac{d\delta k^\mu}{d\lambda} + \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu k_{(b)}^\alpha k_{(b)}^\beta + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu k_{(b)}^\alpha \delta k^\beta = 0 \\ & \therefore \frac{d\delta k^\mu}{d\lambda} + \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu k_{(b)}^\alpha k_{(b)}^\beta + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu k_{(b)}^\alpha \delta k^\beta = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

この方程式に現れるクリストッフェル記号やその摂動をメトリックから計算すると、

$$\delta\Gamma_{\eta\eta}^{\theta} = \delta\Gamma_{\chi\chi}^{\theta} = \frac{\phi_{,\theta}}{f_K^2(\chi)} \quad (\text{A.10})$$

$$\delta\Gamma_{\eta\eta}^{\varphi} = \delta\Gamma_{\chi\chi}^{\varphi} = \frac{\phi_{,\varphi}}{f_K^2(\chi) \sin^2 \theta} \quad (\text{A.11})$$

$$\Gamma_{\chi\theta}^{\theta} = \Gamma_{\chi\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{f_K(\chi)} \frac{df_K(\chi)}{d\lambda} \quad (\text{A.12})$$

$$(\text{A.13})$$

となる。すると、 $\theta, \phi$  方向の測地線方程式は次のようにして解くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{d\delta k^{\theta}}{d\lambda} + 2 \frac{\phi_{,\theta}}{f_K^2(\chi)} + 2 \frac{1}{f_K(\chi)} \frac{df_K(\chi)}{d\lambda} \delta k^{\theta} &= 0 \\ \frac{1}{f_K^2(\chi)} \frac{d}{d\lambda} [f_K^2(\chi) \delta k^{\theta}] &= -2 \frac{\phi_{,\theta}}{f_K^2(\chi)} \\ \therefore f_K^2(\chi) \delta k^{\theta} &= -2 \int d\lambda \phi_{,\theta} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta k^{\varphi}}{d\lambda} + 2 \frac{\phi_{,\varphi}}{f_K^2(\chi) \sin^2 \theta} + 2 \frac{1}{f_K(\chi)} \frac{df_K(\chi)}{d\lambda} \delta k^{\varphi} &= 0 \\ \frac{1}{f_K^2(\chi)} \frac{d}{d\lambda} [f_K^2(\chi) \delta k^{\varphi}] &= -2 \frac{\phi_{,\varphi}}{f_K^2(\chi) \sin^2 \theta} \\ \therefore f_K^2(\chi) \delta k^{\varphi} &= -2 \int \frac{\phi_{,\varphi}}{\sin^2 \theta} d\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

波数ベクトルの定義からさらに積分すると、 $\delta\theta, \delta\varphi$  を求めることができる。

$$\delta\theta = -2 \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{1}{f_K^2(\chi(\lambda))} \int_0^{\lambda} d\lambda' \phi_{,\theta} \quad (\text{A.16})$$

$$\delta\varphi = -2 \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{1}{f_K^2(\chi(\lambda))} \int_0^{\lambda} d\lambda' \frac{\phi_{,\varphi}}{\sin^2 \theta} \quad (\text{A.17})$$

ここで、平坦な宇宙  $f_K(\chi(\lambda)) = \chi(\lambda) = \lambda$  を仮定すると、次のようにして  $\lambda$  についての



積分を計算することができる。

$$\begin{aligned}
 \delta\theta &= -2 \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\lambda d\lambda' \phi_{,\theta} \\
 &= -2 \left[ -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda d\lambda' \phi_{,\theta} \right]_{\lambda=0}^{\lambda=\lambda_s} + \int d\lambda \frac{1}{\lambda} \phi_{,\theta} \\
 &= -2 \left[ -\frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} d\lambda \phi_{,\theta} + \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{\phi_{,\theta}}{\lambda} \right] \\
 &= -2 \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{\lambda_s - \lambda}{\lambda_s \lambda} \phi_{,\theta} \tag{A.18}
 \end{aligned}$$

$$\delta\varphi = -2 \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{\lambda_s - \lambda}{\lambda_s \lambda} \frac{\phi_{,\theta}}{\sin^2 \theta} \tag{A.19}$$

この関係式は、開いた宇宙、閉じた宇宙の場合も成り立つので、一般的には

$$\delta\theta = -2 \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{f(\chi_s - \chi)}{f(\chi_s)f(\chi)} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{A.20}$$

$$\delta\varphi = -2 \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{f(\chi_s - \chi)}{f(\chi_s)f(\chi)} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \tag{A.21}$$

となる。

ここで、 $\theta \ll 1$  となるような領域を考えると、

$$\delta\theta = -2 \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{f(\chi_s - \chi)}{f(\chi_s)f(\chi)} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{A.22}$$

$$\theta\delta\varphi = -2 \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{f(\chi_s - \chi)}{f(\chi_s)f(\chi)} \frac{1}{\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \tag{A.23}$$

となる。 $\theta \ll 1$  とすると、 $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2) = \theta(\cos \varphi, \sin \varphi)$  という座標系は、視線方向に対して垂直な平面上の座標とみなすことができる。すると、この新しい座標系では、測地線の摂動は

$$\delta\theta_1 = -2 \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{f(\chi_s - \chi)}{f(\chi_s)} \frac{1}{f(\chi)} \frac{\partial\phi}{\partial\theta_1} \tag{A.24}$$

$$\delta\theta_2 = -2 \int_0^{\lambda_s} d\lambda \frac{f(\chi_s - \chi)}{f(\chi_s)} \frac{1}{f(\chi)} \frac{\partial\phi}{\partial\theta_2} \tag{A.25}$$

と表される。したがって、重力場  $\phi$  が存在することによって生じる重力レンズ効果のレンズ方程式は、光源の位置を  $\vec{\theta}_s$ 、イメージの位置を  $\vec{\theta}_I$ 、屈折角を  $\vec{\alpha}$  とすると、

$$\vec{\theta}_s = \vec{\theta}_I - \vec{\alpha} \tag{A.26}$$

$$\vec{\alpha} = 2 \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f(\chi_s - \chi)}{f(\chi_s)} \nabla_\perp \phi(\chi) \tag{A.27}$$

と求まることになる。

この式を用いると、質点の重力場によって生じる屈折角  $\vec{\alpha}$  (3.2) を導くことができる。初めに、光子は質点の近傍を通過したときだけその重力場によって光路が曲げられ、インパクトパラメーターはシュバルツシルト半径よりも十分長いと仮定する。すると、(A.27) は次のように近似することができる。

$$\vec{\alpha} \simeq 2 \frac{f(\chi_s - \chi_L)}{f(\chi_s)} \int_0^{\chi_s} d\chi \nabla_{\perp} \phi(\chi) \quad (\text{A.28})$$

ここで、図 (3.1) の質点にもっとも近い位置を原点に観測者から光源を結ぶ方向に  $z$  軸、それと直交する 2 次元平面上での位置ベクトルを  $\vec{\xi}$  とする。この座標系では、質量  $M$  の質点から距離  $r = \sqrt{z^2 + \xi^2}$  だけ離れた位置での重力ポテンシャルは

$$\phi = -\frac{GM}{\sqrt{z^2 + \xi^2}} \quad (\text{A.29})$$

と表される。質点と観測者、光源までの距離は十分遠いとする、(A.28) の積分は、

$$\vec{\alpha} \simeq 2 \frac{f(\chi_s - \chi_L)}{f(\chi_s)} \int_{-\infty}^{\infty} dz \nabla_{\vec{\xi}} \left( -\frac{GM}{\sqrt{z^2 + \xi^2}} \right) \quad (\text{A.30})$$

と書き直すことができる。この式は解析的に次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= 2 \frac{f(\chi_s - \chi_L)}{f(\chi_s)} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{GM}{(z^2 + \xi^2)^{3/2}} \vec{\xi} \\ &= \frac{f(\chi_s - \chi_L)}{f(\chi_s)} \frac{4GM}{\xi} \frac{\vec{\xi}}{\xi} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{GM}{(z^2 + \xi^2)^{3/2}} \vec{\xi} &= \frac{1}{\xi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \cos x, \quad (z = \xi \tan x) \\ &= \frac{2}{\xi^2} \end{aligned}$$

さらに、 $f(\chi)$  を角径距離で表すと、 $f(\chi_s) = a(z_s)D_s$ ,  $f(\chi_s - \chi_L) = a(z_s)D_{ds}$  なので、

$$\vec{\alpha} = \frac{D_{ds}}{D_s} \frac{4GM}{\xi} \frac{\vec{\xi}}{\xi} \quad (\text{A.32})$$

となる。ここで、 $\vec{\alpha}$  と  $\vec{\hat{\alpha}}$  には

$$\vec{\hat{\alpha}} = \frac{D_s}{D_{ds}} \vec{\alpha} \quad (\text{3.7})$$

という関係があるので、

$$\hat{\alpha} = \frac{D_s}{D_{ds}} \alpha = \frac{4GM}{\xi} \quad (\text{3.2})$$

が導かれる。



## 付録 B

# パワースペクトル

大規模構造による重力レンズ (cosmic shear) を考慮するためには、その質量分布のパワースペクトルを積分しなければならない。ここではまず、パワースペクトルを定義し、3次元のパワースペクトルと2次元のパワースペクトルを結びつけるリンバーの方程式を導く。そして、 $\kappa$  の線形パワースペクトルと非線形パワースペクトルの計算のしかたをまとめる。

### B.1 リンバーの方程式

ある場  $g(\vec{x})$  を考える。 $\vec{x}$  は  $n$  次元の空間位置ベクトルを表す。この場の平均は、いたるところで 0 であるとする。つまり、 $\langle g(\vec{x}) \rangle = 0$  が成り立っている。もし、初めに考えた場がこの条件を満たしていないならば、新しく  $g(\vec{x}) - \langle g(\vec{x}) \rangle$  という場を定義すればよい。

任意のベクトル  $\vec{y}$  に対して、 $g(\vec{x} + \vec{y})$  が  $g(\vec{x})$  と空間的に区別できないとき、 $g(\vec{x})$  は一様 (homogenous) であると言う。また、任意の  $n$  次元回転行列  $\mathcal{R}$  に対して、 $g(\mathcal{R}\vec{x})$  と  $g(\vec{x})$  の空間的な性質が等しいとき、 $g(\vec{x})$  は等方的 (isotropic) であるという。ここからは、一様で等方な場  $g(\vec{x})$  を考えていく。

$g(\vec{x})$  の 2 点相関関数 (two-point correlation function) を次のように表す。

$$\langle g(\vec{x})g^*(\vec{y}) \rangle = C_{gg}(|\vec{x} - \vec{y}|) \quad (\text{B.1})$$

$g(\vec{x})$  の相関関数は、2 つの位置ベクトルの差の絶対値にのみ依存し、その値は必ず実数になる。ここで、 $g(\vec{x})$  のフーリエ変換を

$$\hat{g}(\vec{k}) = \int d^n x g(\vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad \hat{g}(\vec{x}) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \hat{g}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (\text{B.2})$$

と定義する。すると、フーリエ空間での相関関数は、

$$\hat{g}(\vec{k})\hat{g}^*(\vec{k}') = \int d^n x e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} \int d^n x' e^{-i\vec{x}'\cdot\vec{k}'} < g(\vec{x})g^*(\vec{x}') > \quad (\text{B.3})$$

と計算することができる。ここで、 $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{y}$  を代入し、(B.1) の相関関数を用いると、

$$\begin{aligned} \hat{g}(\vec{k})\hat{g}^*(\vec{k}') &= \int d^n x e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} \int d^n y e^{-i(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{k}'} C_{gg}(|\vec{y}|) \\ &= (2\pi)^n \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') \int d^n y e^{-i\vec{y}\cdot\vec{k}} C_{gg}(|\vec{y}|) \\ &\equiv (2\pi)^n \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') P_g(|\vec{k}|) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

となる。このとき、一様、等方な場  $g(\vec{x})$  のパワースペクトルを

$$P_g(|\vec{k}|) \equiv \int d^n y e^{-i\vec{y}\cdot\vec{k}} C_{gg}(|\vec{y}|) \quad (\text{B.5})$$

と定義した。

次に、3次元空間におけるパワースペクトルとそれを2次元に射影したものの関係を求める。3次元の場合として、密度ゆらぎ (density contrast)  $\delta[f_K(w)\vec{\theta}, w]$  について考える。ここで、 $\theta$  は天球上での位置を表す2次元ベクトルである。 $q_i(w)$  を重み関数 (weight function) として、 $\delta$  を  $w = 0$  から  $w = w_H$  (ホライズン) まで積分することで、2つの方向への射影を次のように定義する。

$$g_i(\vec{\theta}) = \int dw q_i(w) \delta[f_K(w)\vec{\theta}, w], \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.6})$$

すると、これらの相関関数は、

$$\begin{aligned} C_{12} &= < g_1(\vec{\theta})g_2(\vec{\theta}') > \\ &= \int dw q_1(w) \int dw' q_2(w') < \delta[f_K(w)\vec{\theta}, w] \delta[f_K(w')\vec{\theta}', w'] > \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

と計算することができる。ここで、次のような2つの仮定をおく。1つ目は、 $L_{\text{coh}}$  (coherence scale) より大きいスケール  $L_{\text{coh}} \lesssim |w - w'| \ll w_H$  では、相関関数への寄与は十分小さいとする。これは、 $k \rightarrow 0$  の領域では、パワースペクトル  $P_\delta$  が  $k$  に比例して減少するという性質から成り立つ。2つ目は、 $\Delta w \leq L_{\text{coh}}$  のような領域では、 $q_i(w)$  はそれほど変化しないとする。すると、 $C_{gg} \neq 0$  である  $|w - w'| \lesssim L_{\text{coh}}$  では、 $f_K(w') \approx f_K(w)$ 、 $q_2(w') = q_2(w)$  と近似することができるので、相関関数は、

$$C_{12}(\theta) = \int dw q_1(w) q_2(w) \int d(\Delta w) C_{gg} \left( \sqrt{f_K^2(w)\theta^2 + (\Delta w)^2}, w \right) \quad (\text{B.8})$$

と表すことができる。この式は、3次元の場の2点相関関数とその2次元に射影された場の2点相関関数を結びつけていて、リンバーの方程式と呼ばれる。

また、(B.7)の $\delta$ をフーリエ変換で置き換えると、2次元における2点相関関数と3次元のパワースペクトルを結びつける式を導くことができる。まず、 $\delta$ をフーリエ変換で表すと、

$$C_{12} = \int dw q_1(w) \int dw' q_2(w') \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \times \langle \hat{\delta}(\vec{k}, w) \hat{\delta}^*(\vec{k}', w') \rangle e^{-if_K(w)\vec{k}_\perp \cdot \vec{\theta}} e^{if_K(w')\vec{k}'_\perp \cdot \vec{\theta}'} e^{-ik_3 w} e^{ik'_3 w'} \quad (B.9)$$

と書くことができる。ここで、 $\vec{k}_\perp$ は視線方向に垂直な2次元波数ベクトルを表す。 $\hat{\delta}$ の相関関数は、(B.4)のパワースペクトルを用いて表すと、デルタ関数の存在によって $k'$ についての積分を実行することができる。 $q_2(w')$ や $f_K(w')$ について前と同じような仮定をおくと、2点相関関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} C_{12} &= \int dw q_1(w) q_2(w) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} P_\delta(|\vec{k}|, w) e^{-if_K(w)\vec{k}_\perp \cdot (\vec{\theta} - \vec{\theta}')} e^{-ik_3 w} \int dw' e^{ik_3 w'} \\ &= \int dw q_1(w) q_2(w) \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} P_\delta(|\vec{k}_\perp|, w) e^{-if_K(w)\vec{k}_\perp \cdot (\vec{\theta} - \vec{\theta}')} \\ C_{12}(\theta) &= \int dw q_1(w) q_2(w) \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} P_\delta(|\vec{k}_\perp|, w) e^{-if_K(w)\vec{k}_\perp \cdot \vec{\theta}} \\ &= \int dw q_1(w) q_2(w) \int \frac{k dk}{2\pi} P(k, w) J_0[f_K(w)\theta k] \end{aligned} \quad (B.10)$$

(B.5)からパワースペクトルは相関関数のフーリエ変換なのでパワースペクトル $P_{12}(l)$ は、

$$\begin{aligned} P_{12}(l) &= \int d^2 \theta C_{12}(\theta) e^{i\vec{l} \cdot \vec{\theta}} \\ &= \int dw q_1(w) q_2(w) \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} P_\delta(|\vec{k}_\perp|, w) (2\pi)^2 \delta_D[\vec{l} - f_K(w)\vec{k}_\perp] \\ &= \int dw \frac{q_1(w) q_2(w)}{f_K^2(w)} P_\delta\left(\frac{l}{f_K(w)}, w\right) \end{aligned} \quad (B.11)$$

となる。この式が、フーリエ空間におけるリンバーの方程式である。

## B.2 $\bar{\kappa}_{\text{eff}}$ のパワースペクトル

$\kappa_{\text{eff}}$  は、屈折角から

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{eff}} &\equiv \frac{1}{2} \nabla_{\theta} \cdot \vec{\alpha}(\vec{\theta}, w) \\ &= \int_0^w dw' \frac{f_K(w-w') f_K(w')}{f_K(w)} \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} \Phi[f_K(w') \vec{\theta}, w']\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

と定義される量である。重力ポテンシャル  $\phi$  の 2 階微分は、密度ゆらぎ  $\delta$  とポアソン方程式によって

$$\Delta \Phi = \frac{3H_0^2 \Omega_m}{2a} \delta \quad (\text{B.13})$$

と結びつけられている。よって、 $\kappa_{\text{eff}}$  は

$$\kappa_{\text{eff}} = \frac{3H_0^2 \Omega_m}{2} \int_0^w dw' \frac{f_K(w-w') f_K(w')}{f_K(w)} \frac{\delta[f_K(w') \vec{\theta}, w']}{a(w')} \quad (\text{B.14})$$

となる。つまり、 $\kappa_{\text{eff}}$  は、光路に沿った密度ゆらぎにある重み関数で重みをつけたものを積分した量になる。(B.14) は光源となる天体がすべてある赤方偏移に存在している場合であるが、光源が様々な赤方偏移にあるときは、その分布関数  $G(w)$  で重みをつけて平均する必要がある。

$$\bar{\kappa}_{\text{eff}}(\vec{\theta}) = \int_0^{w_H} dw G(w) \kappa_{\text{eff}}(\vec{\theta}, w) \quad (\text{B.15})$$

ここで、積分範囲を考慮すると次のように書き換えることができる。

$$\bar{\kappa}_{\text{eff}} = \frac{3H_0^2 \Omega_m}{2} \int_0^{w_H} dw \bar{W}(w) f_K(w) \frac{\delta[f_K(w) \vec{\theta}, w]}{a(w)} \quad (\text{B.16})$$

$$\bar{W}(w) \equiv \int_w^{w_H} dw' G(w') \frac{f_K(w'-w)}{f_K(w')} \quad (\text{B.17})$$

(B.6) と (B.16) を比較すると、 $\bar{\kappa}_{\text{eff}}$  のパワースペクトル  $P_{\kappa}(l)$  を求めるためには、

$$q_1(w) = q_2(w) = \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_m \bar{W}(w) \frac{f_K(w)}{a(w)} \quad (\text{B.18})$$

とおけばよいことがわかる。このとき、 $P_{\kappa}(l)$  は密度ゆらぎのパワースペクトル  $P_{\delta}$  を用いて、

$$P_{\kappa}(l) = \frac{9H_0^4 \Omega_m^2}{4} \int_0^{w_H} dw \frac{\bar{W}^2(w)}{a^2(w)} P_{\delta}\left(\frac{l}{f_K(w)}, w\right) \quad (\text{B.19})$$

と表される。

### B.3 $P_\delta$ の線形、非線形パワースペクトル

$\bar{\kappa}_{\text{eff}}$  のパワースペクトルは密度ゆらぎのパワースペクトルを積分したもので表されるので、 $P_\delta$  の表式がわかっていなければいけない。 $\delta$  が 1 より十分小さいスケールでは、密度ゆらぎは線形成長し、そのパワースペクトル  $P_{\delta,l}$  は次のように表される。

$$P_{\delta,l}(k, a) = D^2(a) A k T^2(k) \quad (\text{B.20})$$

ここで、 $D(a)$  は線形成長率で  $P_{\delta,l}$  の時間進化を表し、次のような関数で与えられる。

$$D(a) = a \frac{g'(a)}{g'(1)} \quad (\text{B.21})$$

$$g'(a) = \frac{5}{2} \Omega_m(a) \left[ \Omega_m^{4/7}(a) - \Omega_\Lambda(a) + \left( 1 + \frac{\Omega_m(a)}{2} \right) \left( 1 + \frac{\Omega_\Lambda}{70} \right) \right]^{-1} \quad (\text{B.22})$$

$T(k)$  は遷移関数で、特に BBKS 遷移関数は、

$$T(q \equiv k/\Gamma h \text{Mpc}^{-1}) = \frac{\ln[1 + 2.34q]}{(2.34q)} [1 + 3.89q + (16.2q)^2 + (5.47q)^3 + (6.71q)^4]^{-1/4} \quad (\text{B.23})$$

$$\Gamma \equiv \Omega_m h \quad (\text{B.24})$$

という関数である。また、 $A$  は規格化定数で、 $\sigma_8$  の値によって決まる。

$$\sigma_8^2 = \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} P_\delta(k) \tilde{W}^2(8(h^{-1} \text{Mpc})k) \quad (\text{B.25})$$

$$\tilde{W}(x) = \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x), \quad \text{top-hat function のフーリエ変換} \quad (\text{B.26})$$

一方、 $\delta$  は 1 に近い領域では、非線形成長するために上の線形パワースペクトルはもはや使えなくなる。非線形成長する領域においても適用できる非線形パワースペクトルは Smith et al.(2003)[12] にまとめられている。それによると、非線形パワースペクトル



$P_{\delta, nl}$  は次のようにして計算することができる。

$$P_{\delta, nl} = \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta_{NL}^2(k) \quad (\text{B.27})$$

$$P_{\delta, l} = \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta_L^2(k) \quad (\text{B.28})$$

$$\Delta_{nl}^2(k) = \Delta_Q^2 + \Delta_H^2(k) \quad (\text{B.29})$$

$$\Delta_Q^2(k) = \Delta_L^2(k) \left[ \frac{(1 + \Delta_L^2(k))^{\beta_n}}{1 + \alpha_n \Delta_L^2(k)} \right] \exp[-f(y)] \quad (\text{B.30})$$

$$\text{where } y \equiv k/k_\sigma, f(y) = y/4 + y^2/8$$

$$\Delta_H^2(k) = \frac{\Delta_H^{2'}(k)}{1 + \mu_n y^{-1} + \nu_n y^{-2}} \quad (\text{B.31})$$

$$\Delta_H^{2'}(k) = \frac{a_n y^{3f_1(\Omega_m)}}{1 + b_n y^{f_2(\Omega_m)} + [c_n f_3(\Omega_m) y]^{3-\gamma_n}} \quad (\text{B.32})$$

ここで、様々なパラメーターは次のようにして定義される。

$$\begin{aligned} k_\sigma : \sigma(R_G) &\equiv \int \Delta_L^2(k) \exp(-k^2 R_G^2) d \ln k \\ &\rightarrow \sigma(k_\sigma^{-1}) \equiv 1 \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\text{effective index : } 3 + n_{\text{eff}} \equiv - \left. \frac{d \ln \sigma^2(R)}{d \ln R} \right|_{\sigma=1} \quad (\text{B.34})$$

$$\text{spectral index : } C \equiv - \left. \frac{d^2 \ln \sigma^2(R)}{d \ln R^2} \right|_{\sigma=1} \quad (\text{B.35})$$

$$\log_{10} a_n = 1.4861 + 1.8369n + 1.6762n^2 + 0.7940n^3 + 0.1670n^4 - 0.6206C \quad (\text{B.36})$$

$$\log_{10} b_n = 0.9463 + 0.9466n + 0.3084n^2 - 0.9400C \quad (\text{B.37})$$

$$\log_{10} c_n = -0.2807 + 0.9466n + 0.3214n^2 - 0.0793C \quad (\text{B.38})$$

$$\gamma_n = 0.8649 + 0.2989n + 0.1631C \quad (\text{B.39})$$

$$\alpha_n = 1.3884 + 0.3700n - 0.1452n^2 \quad (\text{B.40})$$

$$\beta_n = 0.8291 + 0.9854n + 0.3401n^2 \quad (\text{B.41})$$

$$\log_{10} \mu_n = -3.5442 + 0.1908n \quad (\text{B.42})$$

$$\log_{10} \nu_n = 0.9589 + 1.2857n \quad (\text{B.43})$$

$$\Omega_m \leq 1 \quad \begin{cases} f_{1a}(\Omega_m) = \Omega_m^{-0.0732} \\ f_{2a}(\Omega_m) = \Omega_m^{-0.1423} \\ f_{3a}(\Omega_m) = \Omega_m^{0.0725} \end{cases} \quad (\text{B.44})$$

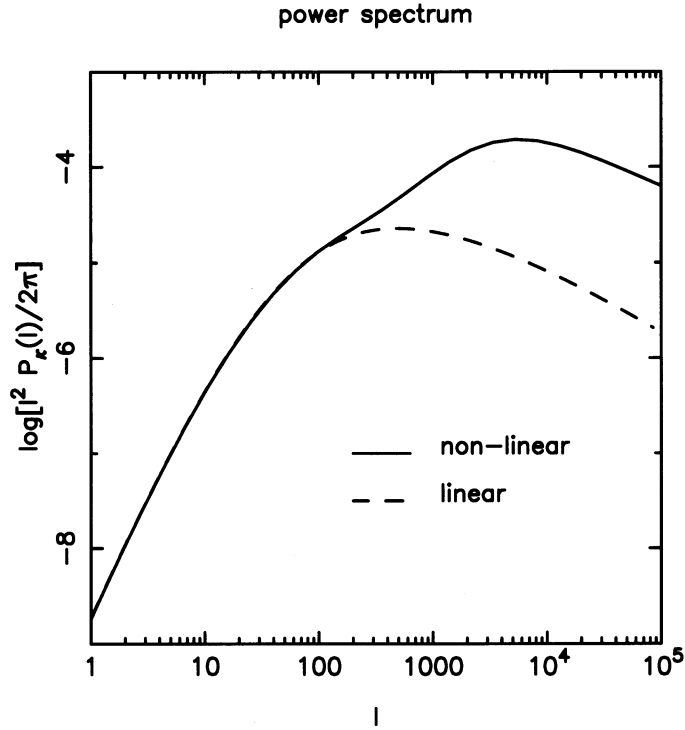


図 B.1 LCDM モデル ( $\Omega_0 = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7, h = 0.7, \sigma_8 = 0.9$ ) における、 $\kappa$  のパワースペクトル  $P_\kappa(l)$ 。光源の赤方偏移は  $z_s = 1$  とした。

$$\Omega_m + \Lambda = 1 \quad \begin{cases} f_{1b}(\Omega_m) = \Omega_m^{-0.0307} \\ f_{2b}(\Omega_m) = \Omega_m^{-0.0585} \\ f_{3b}(\Omega_m) = \Omega_m^{0.0743} \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

図 (B.1) には、LCDM モデルにおける  $\kappa_{\text{eff}}$  の線形パワースペクトル  $P_{\kappa,l}$  と非線形パワースペクトル  $P_{\kappa,nl}$  をプロットした。 $l \sim 1$  (large scale) では  $P_{\kappa,l}$  と  $P_{\kappa,nl}$  は一致しているが、 $l \gg 1$  (small scale) では非線形成長の効果が現れ、 $P_{\kappa,nl} > P_{\kappa,l}$  となっている。



# 謝辞

この論文を作成するにあたり、ご指導、ご協力いただいた方々に対し厚く御礼申し上げます。

高田先生には、学部生のときに重力レンズや相対論の指導をしていただき、大学院生になってからは、指導教官として研究テーマの決定や研究内容について多くの助言、指導をしていただきました。

服部先生には、宇宙論のゼミにおいて指導していただき、特に、修士1年のときには土曜日も朝早くから夕方までゼミをしていただきました。

梅津敬一さんには、この論文で解析に使用させていただいた銀河団 Abell1689 の重力レンズのデータを提供していただきました。

岡部先生には、すばる望遠鏡での観測に同行させていただき、貴重な経験をすることができました。

同学年の茅根裕司君とは同じ宇宙論のゼミに参加し、お互いに切磋琢磨することで宇宙論の理解を助けられました。また、ゼミ以外でも、プログラミングについての基本的な質問に対しても丁寧に答えてくれました。

この他にも、大学の先生方をはじめ様々な方に支えられてこの論文を作成することができました。また、学部、大学院と6年間に渡って仙台、東北大学で学生生活を過ごすことができたのは家族の支えがあったからだと思います。ここに、心から深く感謝の意を表します。



## 参考文献

- [1] Dodelson, S., MODERN COSMOLOGY
- [2] Bartelmann, M., Schneider, P. 1999, (astro-ph/9912508)
- [3] Padmanabhan, T., Structure formation in the universe
- [4] Candace Oaxaca Wright & Tereasa Brainerd. 2000, ApJ, 534, 34
- [5] Jing, Y. P., & Suto, Y. 2002, ApJ, 574, 538
- [6] Oguri, M., Lee, J., & Suto, Y. 2003, ApJ, 599, 7
- [7] Bullock, J. S., Kolatt, T. S., Sigad, Y., Somerville, R. S., Kravtsov, A. V., Klypin, A. A., Primack, J. R., & Dekel, A. 2001, MNRAS, 321, 559
- [8] Oguri, M., Taruya, A., & Suto, Y. 2001, ApJ, 559, 5720
- [9] Asano, K. & Fukuyama, T. 1998, PASJ, 50, 175A
- [10] Keeton, C. R. 2001a, preprint (astro-ph/0102341)
- [11] Oguri, M., Takada, M., Umetsu, K., & Broadhurst, T. 2005, ApJ, 632, 8410
- [12] Smith, R. E., Peacock, J. A., Jenkins, A., White, S. D. M., Frenk, C. S., Pearce, F. R., Thomas, P. A., Efstathiou, G., & Lacey, C. G. 2003, MNRAS, 346, 198
- [13] Corless, V. L. & King, L. J. 2007, MNRAS, 380, 149
- [14] Broadhurst, T., Takada, M., Umetsu, K., Kong, X., Arimoto, N., Chiba, M. & Futamase, T. 2005, ApJ, 619, 1
- [15] Jing, Y. P. & Suto, Y. 2000, ApJ, 529, 69J
- [16] Dodelson, S. 2004, PhRvD, 70, 033008
- [17] Van Waerbeke, L., Mellier, Y., Radovich, M., Bertin, E., Dantel-Fort, M., McCracken, H. J., LeFèvre, O., Foucaud, S., Cuillandre, J.-C., Erben, T., Jain, B., Schneider, P., Bernardeau, F. & Fort, B. 2001, A&A, 374, 757V
- [18] Umetsu, K. & Broadhurst, T. 2007, (astro-ph/0712.3441)
- [19] Cooray, A., Hu, W. & Miralda-Escudé, J. 2000, ApJ, 535, 9C
- [20] Hu, W. & Tegmark, M. 1999, ApJ, 514, 65H
- [21] Hoekstra, H. 2001, A&A, 370, 743H
- [22] Hoekstra, H. 2003, MNRAS, 339, 1155H
- [23] Lee, J. & Suto, Y. 2003, ApJ, 585, 151L

- [24] Schulz, A.E., Hennawi, J. & White, M. 2005, *A&A*, 24, 409S
- [25] Barkana, R. & Loeb, A. 2001, *PhR*, 349, 125B
- [26] Pace, F., Maturi, M., Meneghetti, M., Bartelmann, M., Moscardini, L. & Dolag, K. 2007, *A&A*, 471, 731P
- [27] Hayashi, E., Navarro, J.F. & Springel, V. 2007, *MNRAS*, 377, 50H
- [28] Schramm, T. 1990, *A&A*, 231, 19S
- [29] Bourassa, R.R., Kantowski, R. 1975, *ApJ*, 195, 13B
- [30] Lee, J. & Suto, Y. 2004, *ApJ*, 601, 599L
- [31] Kassiola, A. & Kovner, I. 1993, *ApJ*, 417, 450K
- [32] Hu, W., Sugiyama, N. & Silk, J. 1997, *Natur.* 386, 37H
- [33] Cooray, A. & Sheth, R., 2002, *PhR*, 372, 1C
- [34] Schneider, P. & Bartelmann, M. 1997, *MNRAS*, 286, 696S
- [35] Hattori, M., Kneib, J. & Makino, N. 1999, *PThPS*. 133, 1H
- [36] Carroll, S.M., *SPACETIME and GEOMETRY*